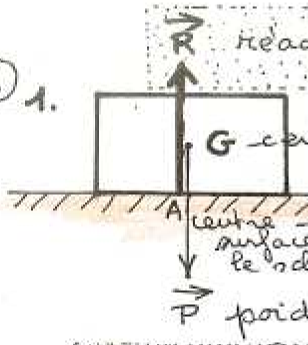
- Statique

① 1.



$\vec{R}$ réaction du support orthogonale au support
c'est une force de liaison.

G centre de gravité du solide

A centre géométrique de la surface de contact entre le solide et le support.

$\vec{P}$ poids du solide

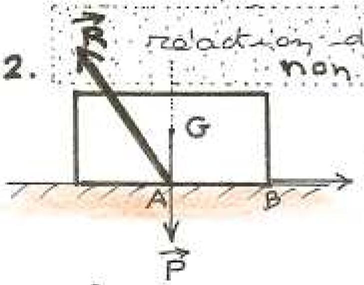
$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$

$$\vec{R} = -\vec{P}$$

forces opposées
- même direction
- même intensité
- sens différents

$R = P$

2.

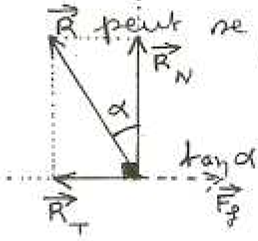


$\vec{R}$ réaction du support non orthogonale au support

$\vec{F}$ ... action exercée sur le solide

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}$$

ces 3 forces doivent être dans le même plan (coplanaires) et leur droite d'action concourent en un même point.



$\vec{R}$ peut se décomposer en une composante normale $\vec{R}_N$ et une composante tangentielle $\vec{R}_T$ $(\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T)$

$$\tan \alpha = \frac{R_T}{R_N} = \frac{F_f}{P}$$

$R_N = P$

$\vec{F}$ force de frottement

$(\vec{F}_f)$ $\vec{F} = -\vec{R}_T$

$F_f = R_T$

le solide se mettra en **mouvement** de glissement
si $R_T \leq F_{f\,maximale}$

loi du frottement

valeur limite de α = φ angle de frottement

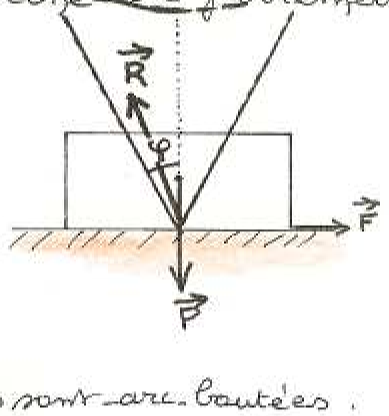
$$\tan \varphi = \frac{F_{f\,max}}{P} = k$$

k coefficient de frottement de glissement : il dépend de l'état des surfaces en contact et de la température

$(\varphi = \tan^{-1} k)$

le solide sera en **équilibre**
si $\alpha < \varphi$

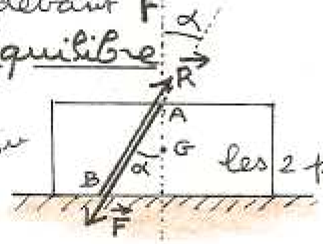
donc, si $\vec{R}$ se trouve à l'intérieur du cône de révolution (cône de frottement)
- de sommet A
- d'axe normal au plan de contact en A
- de demi-angle au sommet φ



3. arc-boutement

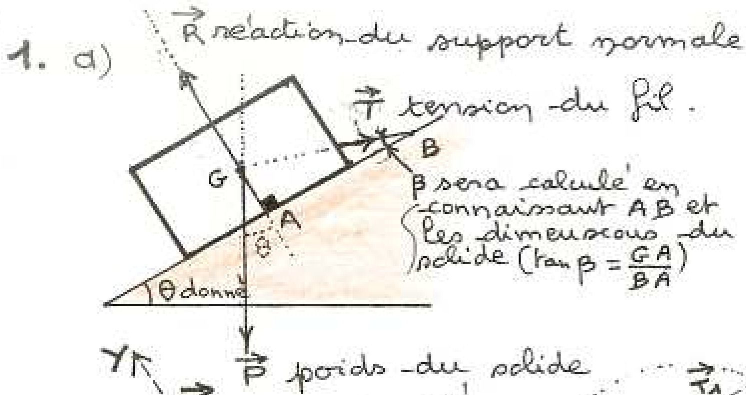
si $\alpha < \varphi$
si $\vec{P}$ est négligeable devant $\vec{F}$
il y aura toujours équilibre
quelle que soit $\vec{F}$

application
la vis à bois est irréversible
(son fil est plus incliné que les vis-écrou)



les 2 pièces sont arc-boutées.

② 1. a)

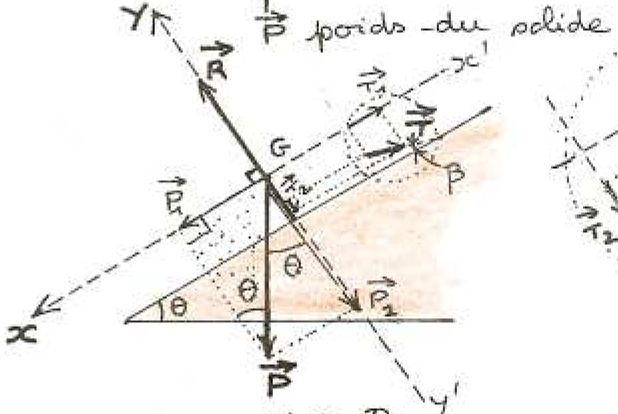


$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = \vec{0}$$

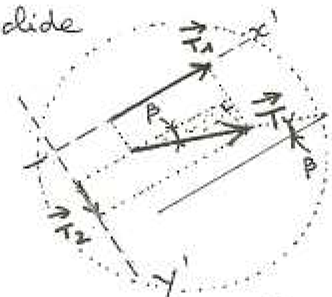
projetons cette équation sur l'axe x'Gx et sur l'axe y'Gy

2 inconnues
2 équations sont nécessaires



$\sin\theta = \frac{P_1}{P}$

$\cos\theta = \frac{P_2}{P}$



$\sin\beta = \frac{T_2}{T}$

$\cos\beta = \frac{T_1}{T}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} P_1 + 0 - T_1 = 0 & (1) \\ -P_2 + R - T_2 = 0 & (2) \end{array}}$$

$\sum \mathcal{M} = 0$ n'est pas nécessaire

(1) $P_1 - T_1 = 0$ $\quad P.\sin\theta - T.\cos\beta = 0$

$P.\sin\theta = T.\cos\beta$

($P = m.g$)

$$\boxed{T = m.g.\frac{\sin\theta}{\cos\beta}}$$

(2) $-P_2 + R - T_2 = 0$ $\quad -P.\cos\theta + R - T.\sin\beta = 0$

$$-P.\cos\theta + R - P.\frac{\sin\theta}{\cos\beta}.\sin\beta = 0 \qquad \frac{\sin\beta}{\cos\beta} \to \tan\beta$$

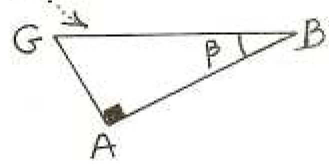
$$R - P.(\cos\theta + \sin\theta.\tan\beta) = 0$$

$$\boxed{R = P.(\cos\theta + \sin\theta.\tan\beta)}$$

b) application numérique

$m = 10\,kg$ $\quad \theta = 23°$ $\quad AB = 110\,cm$

$g = 9,8\,m.s^{-2}$ $\quad AG = 13\,cm$

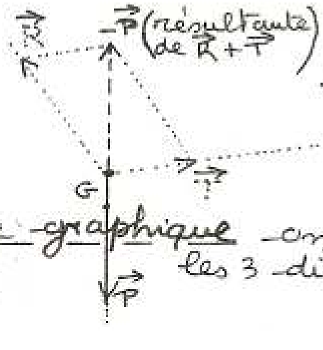


$\tan\beta = \frac{AG}{AB}$

$\beta \simeq 6,74°$

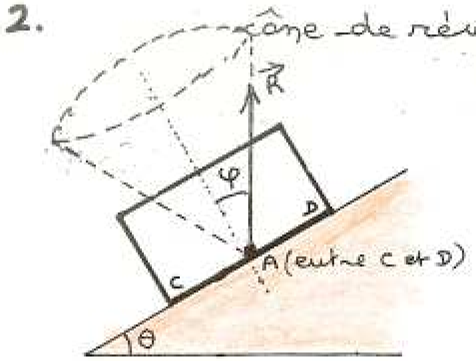
$\cos\beta \simeq 0,9931$ (ou $\frac{AB}{(AG^2 + AB^2)^{1/2}}$)

$\begin{pmatrix} T \simeq 38,6\,N \\ R \simeq 94,8\,N \end{pmatrix}$



c) par la méthode graphique ($\vec{R} + \vec{T} = -\vec{P}$) on peut retrouver ces résultats les 3 directions étant connues

2.



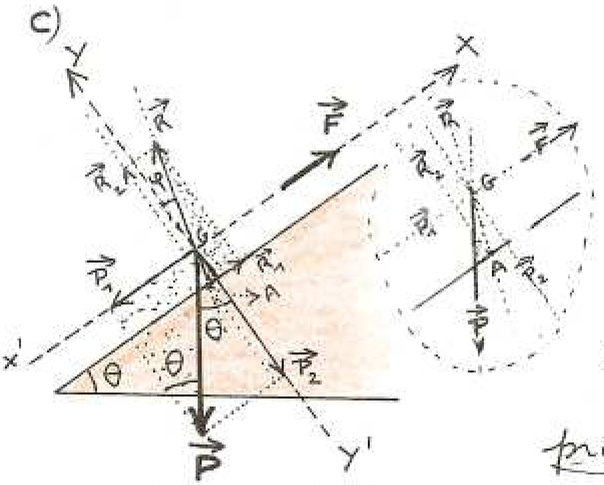
La réaction $\vec{R}$ du support n'est pas orthogonale au plan incliné.

a) $k = \tan\varphi$
(c'est l'angle limite)
la condition d'équilibre étant
$\theta \leqslant \varphi$

$\varphi = \tan^{-1} k \qquad \theta < \tan^{-1} k$

b) $\tan^{-1} k = 16{,}7° = \varphi \qquad (\theta = 30°)$
l'équilibre n'est pas possible.

c)



$\sum \vec{F} = \vec{0}$

$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}$

(les droites d'action de ces 3 forces concourent en G)

$\sum \mathcal{M}_{\vec{F}/\Delta} = 0$

$\mathcal{M}_{\vec{P}/\Delta} + \mathcal{M}_{\vec{R}/\Delta} + \mathcal{M}_{\vec{F}/\Delta} = 0$

projetons sur les axes $x'Gx$ et $y'Gy$ — donc inutile

$$\boxed{\begin{array}{l}(1)\ -P_1 + R_1 + F = 0 \\ (2)\ -P_2 + R_2 + 0 = 0\end{array}}$$

2 équations
2 inconnues (R et F)
c'est suffisant

(1) $-P.\sin\theta + R.\sin\varphi + F = 0 \cdots\cdots> F = P.\sin\theta - R.\sin\varphi$

(2) $-P.\cos\theta + R.\cos\varphi + 0 = 0$

$R.\cos\varphi = P.\cos\theta$

$R = P.\dfrac{\cos\theta}{\cos\varphi}$

$R = m.g.\dfrac{\cos\theta}{\cos\varphi}$

$= P.\sin\theta - P.\dfrac{\cos\theta}{\cos\varphi}.\sin\varphi$ ($\tan\varphi$)

$$\boxed{F = m.g.(\sin\theta - \cos\theta.\tan\varphi)}$$

$F \simeq 94{,}2\ N$ (équilibre)

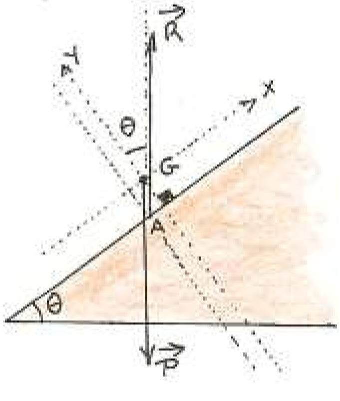
si $F > 94{,}2\ N$ le solide glisse vers le haut

si $F < 94{,}2\ N$ le solide glisse vers le bas

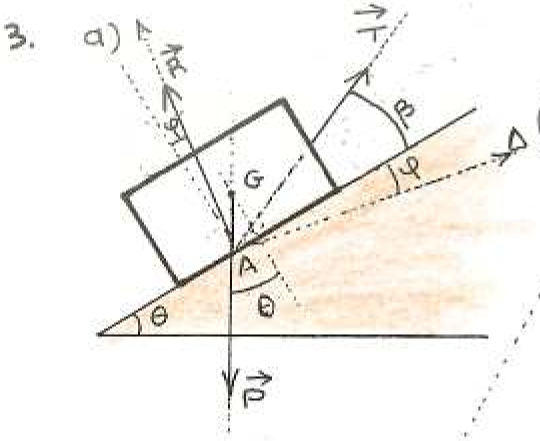
d) si $\theta = \varphi = 16{,}7°$ … alors $F = 0$

$-P.\sin\theta + R.\sin\theta + 0 = 0$

$P = R$ à l'équilibre.



3. a)



$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$
$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = \vec{0}$$

($\vec{P}$, $\vec{R}$ et $\vec{T}$ sont coplanaires et concourantes en A)

$\sum \mathcal{M}\,\vec{F}_{/\Delta} = 0$ inutile, car il n'y a que 2 inconnues, et on peut projeter sur 2 axes.

et comme nous n'avons pas besoin de rechercher R, prenons comme axes de projection celui portant $\vec{R}$ et sa perpendiculaire Δ.

$$-P \cdot \sin(\theta+\varphi) + 0 + T \cdot \cos(\beta+\varphi) = 0$$

(on peut utiliser également la méthode graphique)

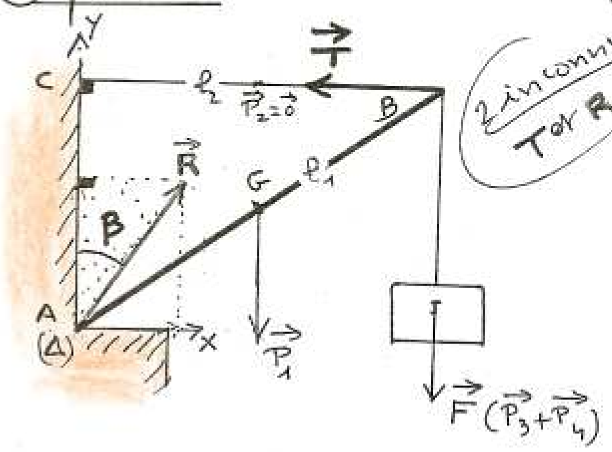
$$\boxed{T = P\,\frac{\sin(\theta+\varphi)}{\cos(\beta+\varphi)}} \simeq 473\ N \quad \text{b)}$$

c) T minimale pour $\cos(\beta+\varphi) = 1$

$\beta + \varphi = 0$

$|\beta| = |\alpha| = 18°$

③ potence



(2 inconnues T et R)

1) $\sum \vec{F} = \vec{0}$

$\vec{P_1} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{F} = \vec{0}$

$\sum \mathcal{M}\,\vec{F}_{/\Delta} = 0$

$\mathcal{M}\,\vec{P_1}_{/\Delta} + \mathcal{M}\,\vec{R}_{/\Delta} + \mathcal{M}\,\vec{T}_{/\Delta} + \mathcal{M}\,\vec{F}_{/\Delta} = 0$

$-P_1 \cdot \frac{BC}{2} + 0 + T \cdot AC - F \cdot BC = 0$

$-P_1 \cdot \frac{\ell_2}{2} + T \cdot \quad - F \cdot \ell_2 = 0$

$AC = \sqrt{\ell_1^2 - \ell_2^2}$

$$\boxed{T = \ell_2 \cdot \frac{P_1/2 + F}{\sqrt{\ell_1^2 - \ell_2^2}}}$$

$T \simeq 696\ N$

2) caractéristiques de $\vec{R}$

considérons les 2 axes Ax et Ay

projection sur Ax :

$0 + R \sin\beta - T + 0 = 0$; $R \sin\beta = T$

projection sur Ay :

$-P_1 + R \cdot \cos\beta + 0 - F = 0$; $R \cos\beta = F + P_1$

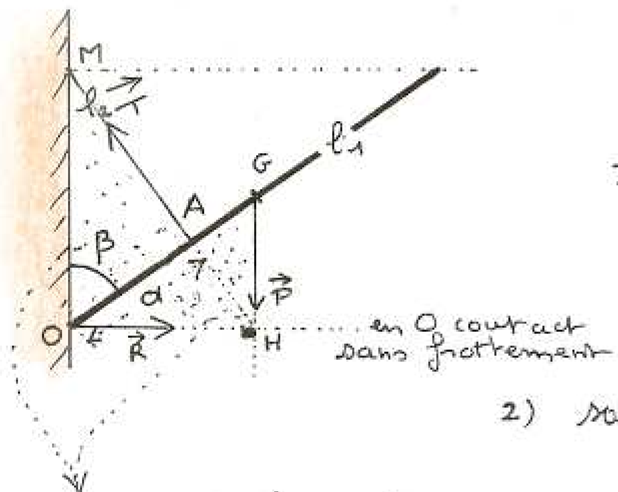
$\tan\beta = \frac{T}{F + P_1}$

$\beta \simeq 32{,}5°$

$R \cdot \sin\beta = T$

$$\boxed{R = \frac{T}{\sin\beta}} \quad R \simeq 1302\ N$$

④ tableau accroché



1) 3 forces $\begin{cases} \vec{P} & \text{poids du tableau} \\ \vec{T} & \text{tension du fil} \\ \vec{R} & \text{réaction du support en O.} \end{cases}$

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = \vec{0}$$

ces 3 forces doivent être coplanaires et concourantes

donc M, A et H sont alignés

(point de concours des 3 droites d'action)

2) soit $OA = a$

triangles homothétiques

$$\frac{\ell_1/2 - a}{a} = \frac{GH}{OM} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\ell_1}{2} - a = \frac{a}{2}$$

$$\frac{\ell_1}{2} = \frac{3a}{2} \qquad a = \frac{\ell_1}{3}$$

(dans OMA
$AM^2 = OM^2 + OA^2 - 2\,OM.OA.\cos\beta$)

$$\ell_2^2 = \ell_1^2 \cos^2\beta + a^2 - 2\,a\,\ell_1 \cos^2\beta$$

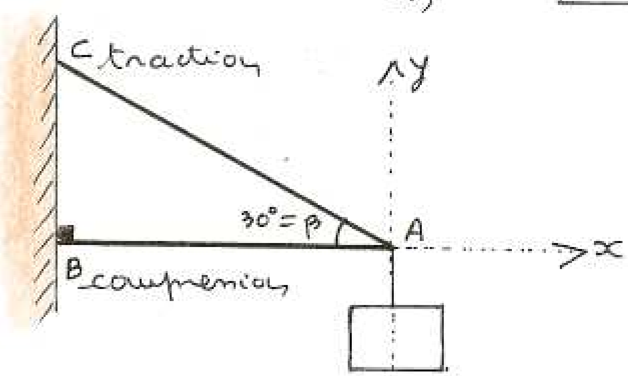
$$\cos^2\beta = \frac{3\ell_2^2}{\ell_1^2} - \frac{1}{3} \quad \text{et } 0 \leqslant \cos^2\beta \leqslant 1$$

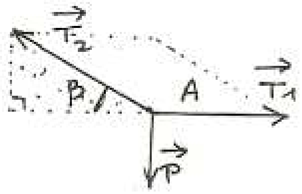
3) on déduit $\frac{\ell_1}{3} \leq \ell_2 \leqslant \frac{2\ell_1}{3}$

⑤ console

1) A doit être en équilibre

$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ (forces concourantes)





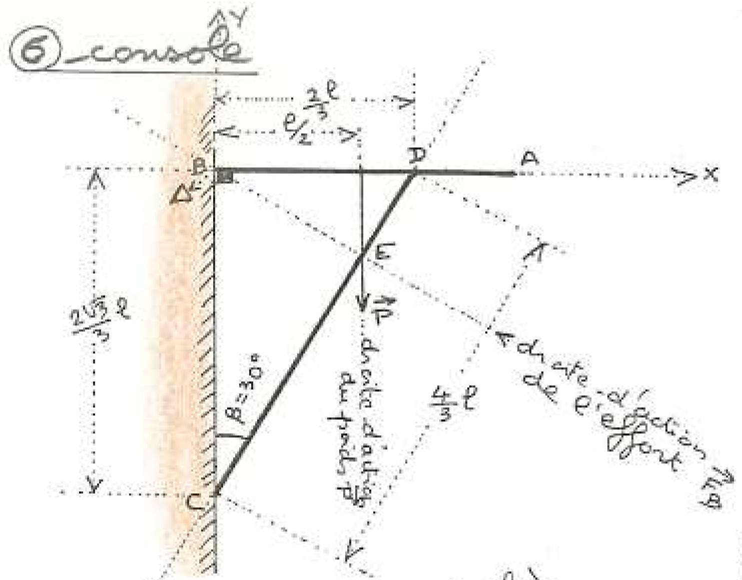
2) $\vec{P} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = 0$

projection sur Ax: $0 + T_1 - T_2.\cos\beta = 0$

projection sur Ay: $-P + 0 + T_2.\sin\beta = 0 \rightarrow T_2 = \frac{P}{\sin\beta} \simeq 400N$

$\rightarrow T_1 = T_2.\cos\beta \simeq 346N$

⑥ console



(par le calcul on a trouvé $BC = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ell$ et $CD = \frac{4}{3}\ell$)

la console est soumise à 3 forces
- poids $\vec{P}$
- force $\vec{F_B}$ exercée par le mur
- force $\vec{F_C}$ exercée par le mur

... 3 forces concourantes en E pour cette console en équilibre.

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{P} + \vec{F_B} + \vec{F_C} = \vec{0}$$

projection sur Bx

$$0 - F_{Bx} + F_{Cx} = 0 \quad (1)$$

projection sur By

$$-P + F_{By} + F_{Cy} = 0 \quad (2)$$

$$\sum \mathcal{M}_{\vec{F}/\Delta} = 0$$

$$-P \cdot \frac{\ell}{2} + F_{Cx} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}\ell = 0 \quad (3)$$

3 équations pour 4 inconnues !

(3) $-P\frac{\ell}{2} + F_{Cx} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}\ell = 0$ $\quad F_{Cx}\frac{2\sqrt{3}}{3}\ell = P\frac{\ell}{2}$

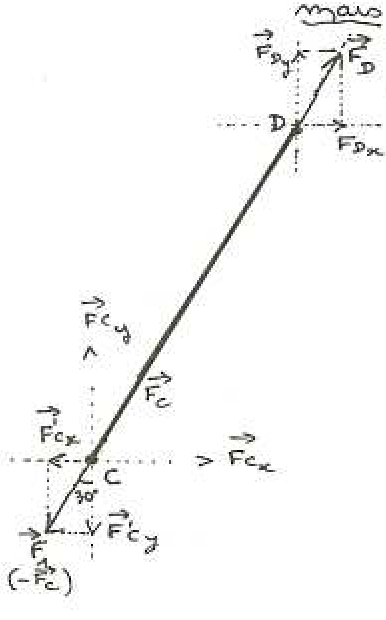
$$F_{Cx} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot P$$

(1) $-F_{Bx} + F_{Cx} = 0$ $\quad F_{Bx} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot P$

(2) $F_{By} + F_{Cy} = P$?

pour continuer il faut trouver de nouvelles équations :

(on pourrait maintenant isoler BA ou CD et écrire les conditions d'équilibre)



mais comme il ne manque qu'une équation :
prenons CD seule
elle est soumise à 2 forces colinéaires et opposées

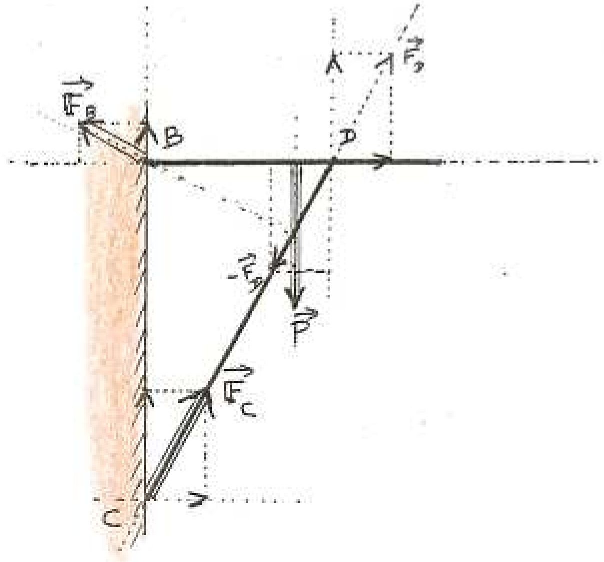
- $F_{Cx} = F'_{Cx} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot P$

  $F'_{Cy} = F'_{Cx} / \tan 30 = \frac{3}{4} P$ $\quad \ldots \; F_{Cy} = \frac{3}{4} P$

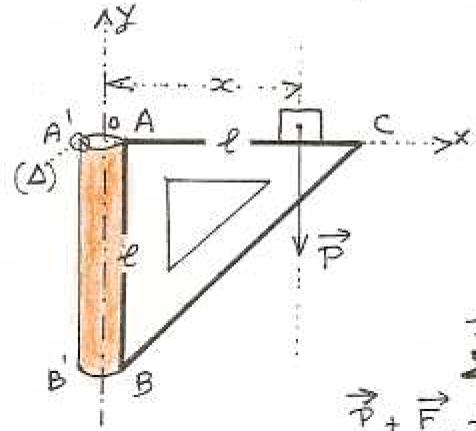
  (2) $F_{By} + F_{Cy} = P$ ... $\quad F_{By} = \frac{P}{4}$

- $F_{Dx} = F_{Cx}$ $\quad F_{Dx} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot P$

  $F_{Dy} = F_{Cy}$ $\quad F_{Dy} = \frac{3}{4} P$



⑦ console mobile



il y a contact en B et A'.

Désignons par $\vec{F}_B$ et $\vec{F}_{A'}$ les 2 efforts en B et A'

et $\begin{cases} \vec{F}_{Bx}\ ,\ \vec{F}_{A'x} \\ \vec{F}_{By}\ ,\ \vec{F}_{A'y} \end{cases}$ leurs projections sur les 2 axes.

conditions d'équilibre

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{P} + \vec{F}_{A'} + \vec{F}_B = \vec{0}$$

projections

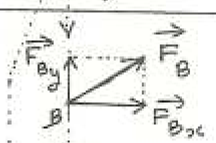
(1) $0 - F_{A'x} + F_{Bx} = 0$ (sur Ox)

(2) $-P + F_{A'y} + F_{By} = 0$ (sur Oy)

elles évitent le glissement

$$\Sigma \mathcal{M}_{\vec{F}/\Delta} = 0$$

$\mathcal{M}_{\vec{P}/\Delta} + \mathcal{M}_{\vec{F}_{A'}/\Delta} + \mathcal{M}_{\vec{F}_B/\Delta} = 0$ (3) $(x+r).P - \ell.F_{Bx} - 2r.F_{By} = 0$



$\frac{F_{By}}{F_{Bx}} = k$

$F_{By} = k.F_{Bx}$

(3) $(x+r).P - \ell.F_{Bx} - 2rk.F_{Bx} = 0$

$x + r = (\ell + 2rk)\frac{F_{Bx}}{P}$

de même $F_{A'y} = k.F_{A'x}$

(2) $-P + F_{A'y} + F_{By} = 0$ ··> $P = F_{A'y} + F_{By}$

$P = k.F'_{Ax} + k.F_{Bx}$

(1) $0 - F_{A'x} + F_{Bx} = 0$ ··> $F_{A'x} = F_{Bx}$

$P = 2k.F_{Bx}$

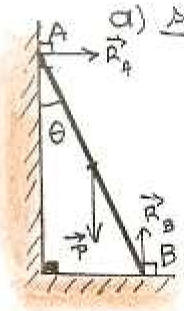
$x + r = (\ell + 2rk)\frac{F_{Bx}}{2k\,F_{Bx}}$

$x + r = \frac{\ell + 2rk}{2k} = \frac{\ell}{2k} + r$

$\boxed{x = \frac{\ell}{2k}}$ distance minimale

B) échelle simple

1. mur et sol lisses

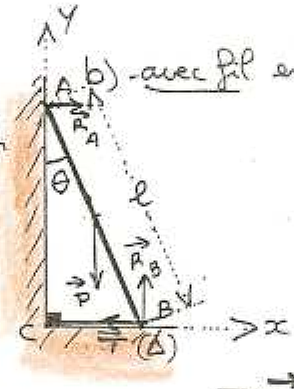


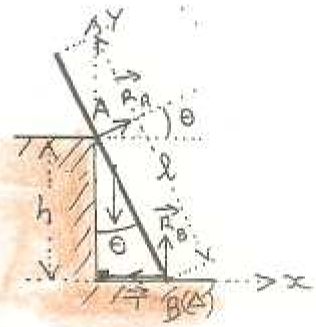
a) sans fil

équilibre impossible quelque soit la valeur de θ.

$\vec{P} + \vec{R}_A + \vec{R}_B \neq \vec{0}$

b) avec fil en





$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{P} + \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{T} = \vec{0}$$

$0 + R_A + 0 - T = 0$ | $0 + R_A \cos\theta + 0 - T = 0$ (1)

$-P + 0 + R_B + 0 = 0$ | $-P + R_A \sin\theta + R_B + 0 = 0$ (2)

$$\Sigma \mathcal{M} = 0$$

$P \cdot \frac{l}{2} \sin\theta - R_A \, l \cos\theta = 0$ | $P \cdot \frac{l}{2} \sin\theta - R_A \frac{h}{\cos\theta} = 0$ (3)

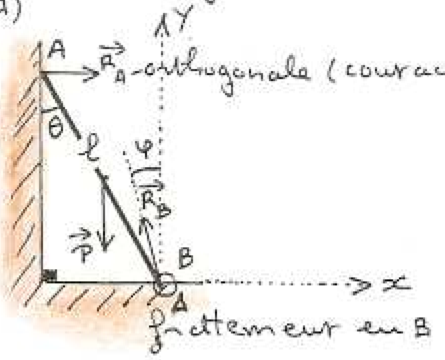
$\frac{P}{2} \tan\theta = R_A$ | (3) $R_A = \frac{P \cdot l}{2h} \sin\theta . \cos\theta = \frac{Pl}{4h} \sin 2\theta$

$\frac{P}{2} \tan\theta = T$ | (1) $T = R_A . \cos\theta$

$P = R_B$ | (3) $R_B = P - R_A . \sin\theta$

2. sol rugueux

a)



$\vec{R}_A$ orthogonale (contact sans frottement en A)

frottement en B

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{P} + \vec{R}_A + \vec{R}_B = \vec{0}$$

en projection

$0 + R_A - R_B \sin\varphi = 0$

$-P + 0 + R_B \cos\varphi = 0$

$R_B \sin\varphi = R_A$

$R_B \cos\varphi = P$

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{R_A}{P}}$$

$\tan\varphi \simeq 0,577$

$\varphi \simeq 16°$

$$\Sigma \mathcal{M} = 0$$

$P \frac{l}{2} \sin\theta - R_A . l . \cos\theta = 0$

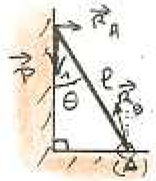
$R_A = \frac{P}{2} \tan\theta \simeq 72,2 \text{ N}$

$R_B = \frac{P}{\cos\varphi} \simeq 260,2 \text{ N}$

θ suite

b) • $\tan\varphi = \frac{R_A}{P_1}$ $\left(R_A = P_1 . \tan\varphi \simeq 288,6\,N\right)$

$\Sigma \mathcal{M} = 0$



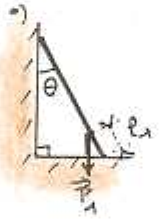
$+P_1 . \ell . \sin\theta - R_A . \ell . \cos\theta = 0$

$P_1 \ell \sin\theta = R_A \ell \cos\theta$

$tg\,\theta = \frac{R_A}{P_1}$

il faut $\boxed{\theta = \varphi}$

•)

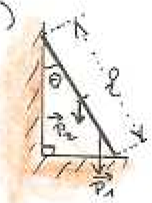


$+P_1 . \ell_1 . \sin\theta = R_A . \ell . \cos\theta$

$\ell_1 = \frac{R_A}{P_1 \tan\theta} . \ell$

$\ell_1 = \frac{P_1 . \tan\varphi}{P_1 . \tan\theta} . \ell$ $\boxed{\ell_1 = \frac{\tan\varphi}{\tan\theta} . \ell} \simeq 0,5 . \ell$

c)

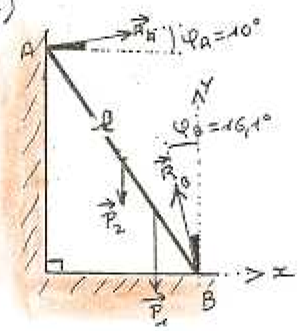


$R_A = (P_1 + P_2) . \tan\varphi$

$+P_1 . \ell_1 . \sin\theta + P_2 . \frac{\ell}{2} . \sin\theta = R_A . \ell . \cos\theta$

$\ell_1 \simeq \ldots\ 0,5 . \ell$

d)



- on reprend tout ...

$R_A . \cos\varphi_A - R_B . \sin\varphi_B = 0$ (projection sur Bx)

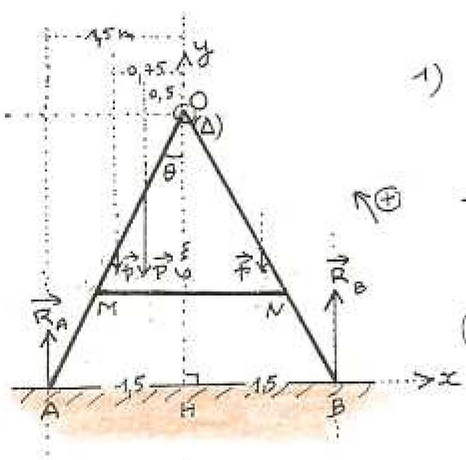
$-P_1 - P_2 + R_A . \sin\varphi_A + R_B . \cos\varphi_B = 0$ (projection sur By)

$P_2 . \frac{\ell}{2} . \sin\theta + P_1 . \ell_1 . \sin\theta - R_A . \cos\varphi_A . \ell . \cos\theta = 0$ $(\Sigma \mathcal{M} = 0)$

- après calcul : $R_A \simeq 348,6\,N$

$\ell_1 \simeq 0,47 . \ell$

9 échelle double



1) $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ l'échelle double est en équilibre (OA + OB + MN)

$\vec{P} + 2\vec{p} + \vec{R_A} + \vec{R_B} = \vec{0}$

$-P - 2p + R_A + R_B = 0$ (projection sur Hy)

$R_A + R_B = P + 2 . p$

$\Sigma \mathcal{M} = 0$

$\underbrace{\mathcal{M}\vec{P}_{/\Delta} + \mathcal{M}\vec{p}_{/\Delta}}_{0} + \underbrace{\mathcal{M}\vec{T_1}_{/\Delta} + \mathcal{M}\vec{T_2}_{/\Delta}}_{0} + \underbrace{\mathcal{M}\vec{p}_{/\Delta}}_{-P . 0,5} + \underbrace{\mathcal{M}\vec{R_A}_{/\Delta}}_{-R_A . 1,5} + \underbrace{\mathcal{M}\vec{R_B}_{/\Delta}}_{+R_B . 1,5} = 0$

résumons :

$R_A + R_B = 1100$

$-0,5 P - 1,5 . R_A + 1,5 . R_B = 0$

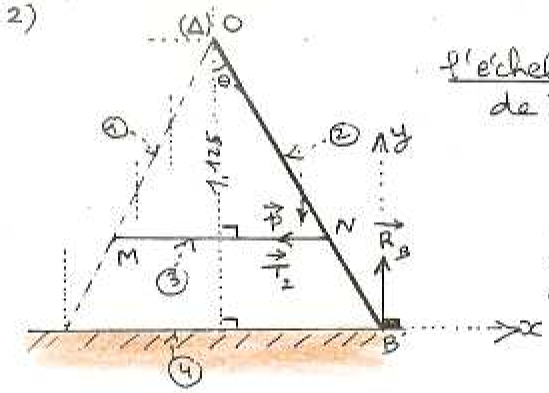
$R_A + R_B = 1100$

$-R_A + R_B = 300$

$R_B = 700\,N$

$R_A = 400\,N$

2)



<u>l'échelle simple OB</u> est en équilibre sous l'action de $\vec{p}$, $\vec{R}_B$, $\vec{T}_2$ et $\vec{F}_2$

$\vec{F}_2$: action de ① sur ②

$\vec{T}_2$: action de ③ sur ②

$\vec{R}_B$: réaction du ④ lisse sur ②

$\vec{p}$: action de la « terre » sur ② : poids $\vec{p}$

pas de question sur $\vec{F}_2$

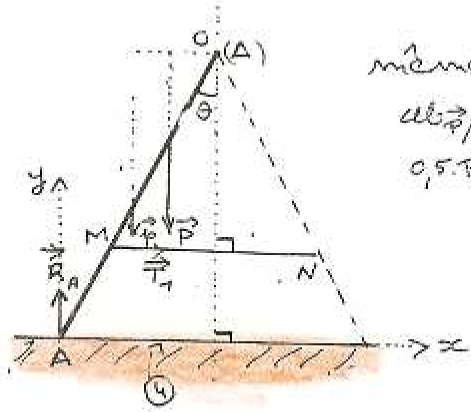
une inconnue T_2 ... une équation $\Sigma \mathcal{M} = 0$

$$\mathcal{M}\vec{p}/\Delta + \mathcal{M}\vec{T}_2/\Delta + \mathcal{M}\vec{R}_B/\Delta + \mathcal{M}\vec{F}_2/\Delta = 0$$

$$0{,}75\,p - 1{,}125 \cdot T_2 + 1{,}5 \cdot R_B + 0 = 0$$

$$T_2 = \frac{1{,}5 \cdot R_B + 0{,}75 \cdot p}{1{,}125}$$

$$T_2 \simeq 1000\,N$$



même travail pour <u>l'échelle OA</u>

$$\mathcal{M}\vec{P}/\Delta + \mathcal{M}\vec{p}/\Delta + \mathcal{M}\vec{T}_1/\Delta + \mathcal{M}\vec{R}_A/\Delta + \mathcal{M}\vec{F}_1/\Delta = 0$$

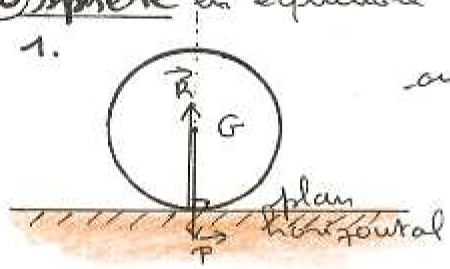
$$0{,}5 \cdot P + 0{,}75 \cdot p + 1{,}125 \cdot T_1 - 1{,}5 \cdot R_A + 0 = 0$$

$$T_1 = \frac{1{,}5 \cdot R_A - 0{,}5\,P - 0{,}75\,p}{1{,}125}$$

$$T_1 \simeq 66{,}7\,N$$

⑩ <u>sphère</u> en équilibre :

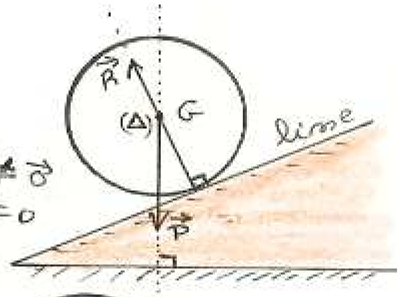
1.

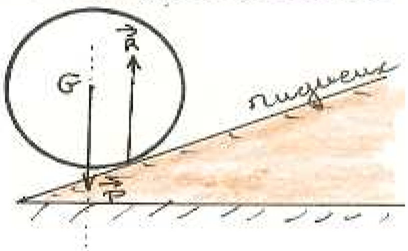


$\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ et $\Sigma \mathcal{M} = 0$: oui

non : $\Sigma\vec{F} \neq \vec{0}$, $\Sigma\mathcal{M} = 0$

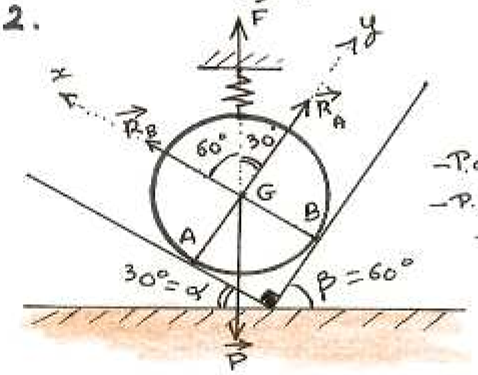
non : $\Sigma\vec{F} = 0$, $\Sigma\mathcal{M} \neq 0$





2.

$F = k \cdot \Delta l = 9\,N$



$$\Sigma\vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{P} + \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{F} = 0$$

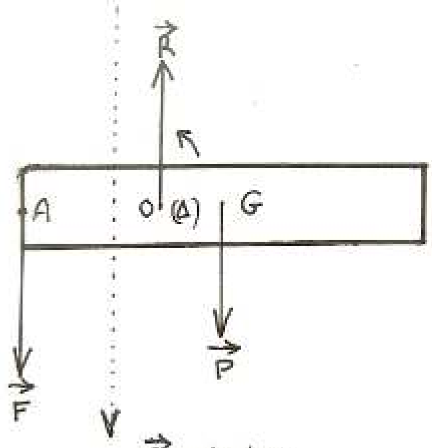
$-P \cdot \cos 60 + 0 + R_B + F \cdot \cos 60 = 0$ (projection sur Gx)

$-P \cdot \cos 30 + R_A + 0 + F \cdot \cos 30 = 0$ (projection sur Gy)

$$R_B \simeq 5{,}5\,N$$

$$R_A \simeq 9{,}5\,N$$

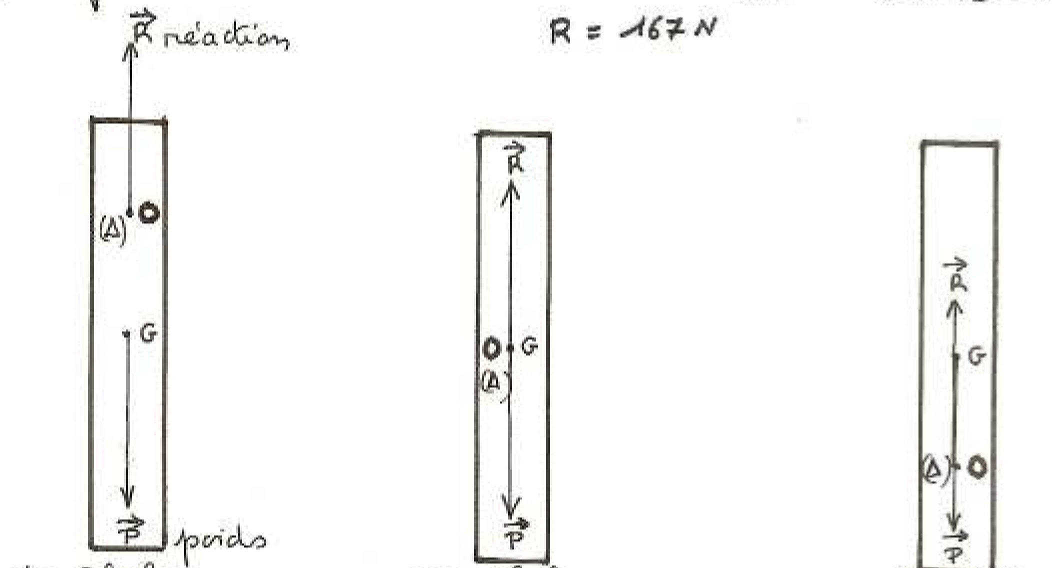
11



$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$
$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}$$
$$P - R + F = 0$$
$$R = P + F$$
$$R = P + P \cdot \frac{OG}{OA}$$
$$R = P \cdot \left(1 + \frac{OG}{OA}\right) \quad \cdots \quad OG = l/2 - OA = 5 - 3 = 2\,m$$
$$R = 167\,N$$

$$\sum \mathcal{M} = 0$$
$$\mathcal{M}_{\vec{P}/\Delta} + \mathcal{M}_{\vec{R}/\Delta} + \mathcal{M}_{\vec{F}/\Delta} = 0$$
$$-P \cdot OG + 0 + F \cdot OA = 0$$
$$P \cdot OG = F \cdot OA$$
$$F = P \cdot \frac{OG}{OA}$$

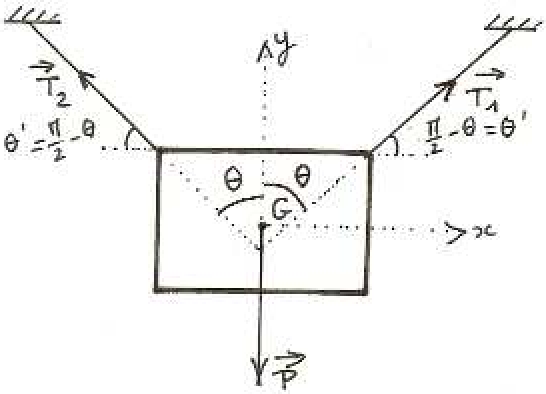
12



équilibre **stable** — équilibre **indifférent** — équilibre **instable**

équilibre
$$\sum \vec{F} = \vec{0} \cdots \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$
$$\sum \mathcal{M} = 0 \cdots \mathcal{M}_{\vec{P}/\Delta} + \mathcal{M}_{\vec{R}/\Delta} = 0$$

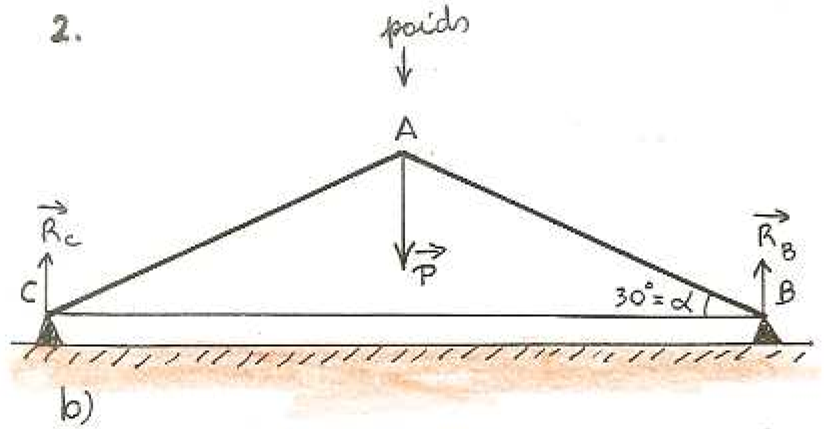
13 1.



$$P = m \cdot g$$
$$P \simeq 392{,}4\,N$$

le solide est en équilibre
$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$
$$\vec{P} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = \vec{0}$$
$$0 + T_1 \cdot \sin\theta - T_2 \cdot \sin\theta = 0$$
$$-P + T_1 \cdot \cos\theta + T_2 \cdot \cos\theta = 0$$
$$T_1 \cdot \sin\theta = T_2 \cdot \sin\theta$$
$$T_1 = T_2$$
$$2T_1 \cdot \cos\theta = P$$
$$T_1 = P \cdot \frac{\cos\theta}{2} \simeq 126{,}1\,N = T_2$$

2.



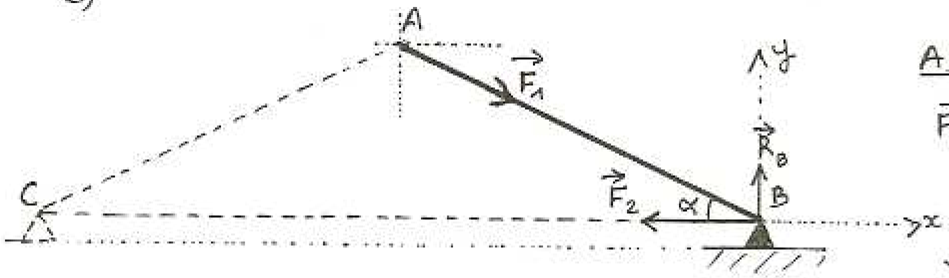
a) $P = R_A + R_B$

$P \to 3000\,N$, $R_A \to 1500\,N$, $R_B \to 1500\,N$

$\left(R_A = R_B = \frac{P}{2}\right)$

b)

c)



<u>AB est en équilibre</u>

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{R_B} = \vec{0}$$

$\vec{F_1}$: compression de AB sous l'effet du poids supporté A

$\vec{F_2}$: action de BC sur AB

$\vec{R_B}$: réaction sans frottement

$F_1 \cdot \cos\alpha - F_2 + 0 = 0$ (projection sur Bx)

$-F_1 \cdot \sin\alpha + 0 + R_B = 0$ (projection sur By)

$R_B \to \frac{P}{2}$

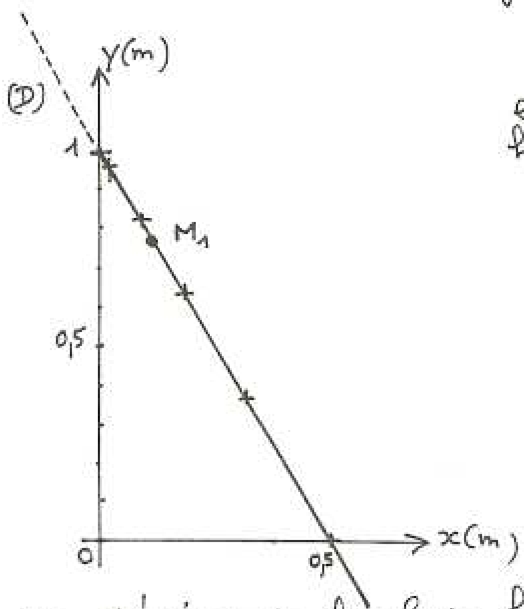
$F_1 \cdot \sin\alpha = R_B \qquad F_1 = \frac{R_B}{\sin\alpha} \qquad \mathbf{F_1} = \frac{P}{2 \cdot \sin\alpha} = 3000\,N$

$F_2 = F_1 \cdot \cos\alpha \qquad \mathbf{F_2} = \frac{P}{2 \cdot \sin\alpha} \cdot \cos\alpha = \frac{P}{2 \cdot \tan\alpha} \simeq 2598\,N$

① 1.

t(s)	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
x(m) $t^2/2$	0	0,02	0,08	0,18	0,32	0,50
y(m) $1-t^2$	1	0,96	0,84	0,64	0,36	0

sur le graphique les 6 points sont alignés suivant la droite D.



2. on recherche la relation $y = f(x)$ en éliminant t entre les deux lois horaires

$$M\left|\begin{array}{l} x = \frac{t^2}{2} \\ y = 1 - t^2 \end{array}\right. \quad t^2 = 2x$$

soit $y = 1 - 2x$

M reste sur la droite D d'équation $y = -2x + 1$

le mouvement de M est rectiligne

3. en dérivant les lois horaires, nous obtenons les coordonnées cartésiennes du vecteur vitesse.

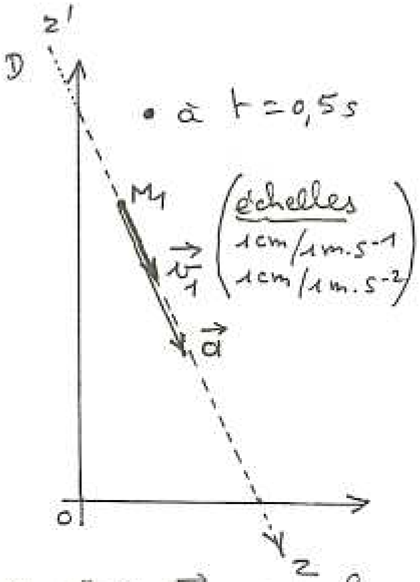
une deuxième dérivation donne celles du vecteur accélération.

• à t quelconque :

$$\vec{v}\left|\begin{array}{l} \dot{x} = t \\ \dot{y} = -2t \end{array}\right. \qquad \vec{a}\left|\begin{array}{l} \ddot{x} = 1 \\ \ddot{y} = -2 \end{array}\right.$$

les coordonnées ne dépendent pas du temps.

le vecteur accélération est constant



• à $t = 0,5\,s$ M est en $M_1 \left|\begin{array}{l} x = 0,125 \\ y = 0,75 \end{array}\right.$

$$\vec{v}_1\left|\begin{array}{l} \dot{x} = 0,5 \\ \dot{y} = -1 \end{array}\right. \qquad \vec{a}\left|\begin{array}{l} \ddot{x} = 1 \\ \ddot{y} = -2 \end{array}\right.$$

$\vec{a}$ et $\vec{v}_1$ sont colinéaires à la droite D (c'est normal pour un mouvement rectiligne)

4. $t = 0,5\,s$

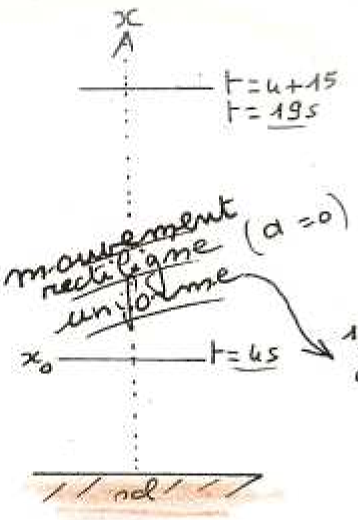
$$v_1 = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \simeq 1,12\ m.s^{-1}$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} \simeq 2,24\ m.s^{-2}$$

5. $\vec{a}$ et $\vec{v}_1$ ont le même sens

le mouvement de M est rectiligne uniformément varié

②



mouvement rectiligne uniforme (a = 0)

1) équations horaires

• $x = v.t + x_0$

vitesse constante

$x_0 = 1{,}6$ m au départ de ce mouvement

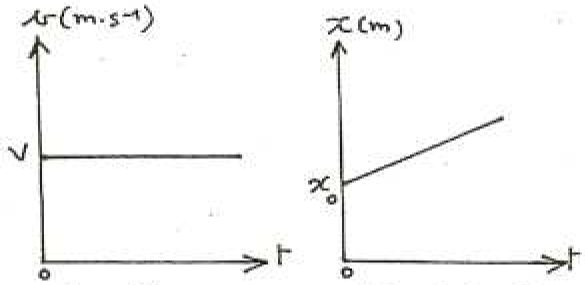
$v = 0{,}8 \ m.s^{-1}$

$x = 0{,}8.t + 1{,}6$

2) $x = 0{,}8.15 + 1{,}6$

$x = \underline{13{,}6 \ m}$

3)



des vitesses — des espaces

③

1)

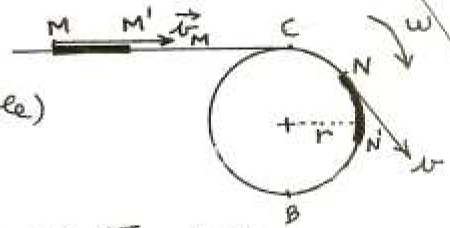
pendant un certain temps t

M va de M à M'

et N va de N à N'

$MM' = \overset{\frown}{NN'}$ (câble inextensible)

$$\boxed{v_M = v_N \qquad v_N = r.\omega}$$



2)

$\omega = 20 \ tr.min^{-1} = \frac{20}{60} \ tr.s^{-1} = \frac{2\pi}{3} \ rad.s^{-1}$

$v_M \simeq 0{,}209 \ m.s^{-1}$

> lorsqu'un câble est inextensible et est en contact sans glissement avec un cylindre (ou une poulie), les points du câble et les points de la périphérie du cylindre ont à un instant, la **même vitesse**.

vitesse angulaire ω constante.

vitesse « linéaire » v aussi ($v = \omega.r$)

3)

de M à C : <u>mouvement rectiligne uniforme</u> ($\vec{a} = \vec{0}$, $a = 0$)

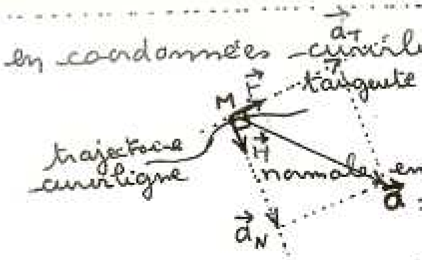
de C à B : <u>mouvement circulaire uniforme</u>.

accélération centripète

$a = r.\omega^2$ … $a = 0{,}439 \ rad.s^{-2}$ en B

④

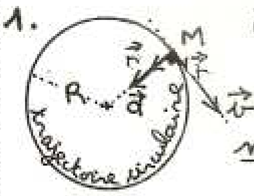
en coordonnées curvilignes



$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$

$= \dot{v}.\vec{T} + \frac{v^2}{R}.\vec{n}$

1.



$\vec{a} = 50.\vec{n}$

donc $\dot{v} = 0$

v = constante

mouvement circulaire uniforme

$\frac{v^2}{R} = 50 \text{ m.s}^{-2}$

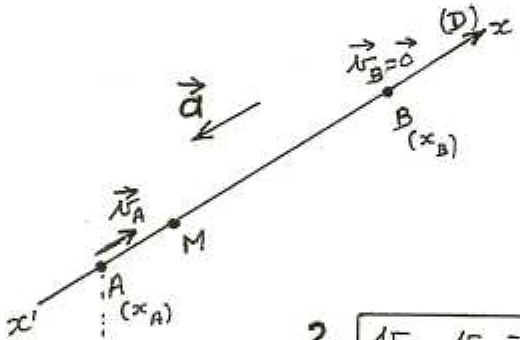
2. $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,4.\pi} = 5 \text{ rad.s}^{-1}$

$v = \omega R$

$\frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2.R = 50 \text{ m.s}^{-2}$

$R = 50/\omega^2 = 2 \text{ m}$

⑤ **1.**



mouvement uniformément varié

l'accélération $\vec{a}$ est constante

$\boxed{v_B^2 - v_A^2 = 2.a.(x_B - x_A)} = 2.a.AB$

$a = \frac{-v_A^2}{2.AB} = -0,2 \text{ m.s}^{-2}$

elle est négative.

($\vec{v}$ et $\vec{a}$ de sens opposés)

2. $\boxed{v_B - v_A = a.(t_B - t_A)}$

$t_B - t_A = \frac{-v_A}{a} = 4 \text{s}$

3. il faut déterminer la loi horaire du mouvement.

(bien préciser les conventions choisies)

cette loi décrit le mouvement aussi bien à l'aller qu'au retour.

origine des dates

origine de l'axe x'x. $x_0 = 0$

$a = -0,2 \text{ m.s}^{-2}$

$v_0 = v_A = 0,8 \text{ m.s}^{-1}$

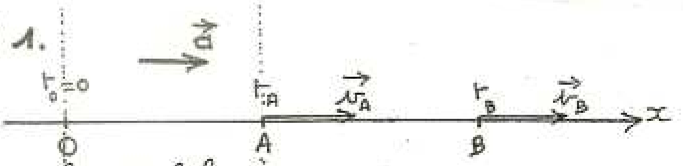
loi horaire $x = f(t)$: $x = \frac{1}{2}.a.t^2 + v_0.t + x_0$

$\boxed{x = -0,1.t^2 + 0,8.t}$

$t = 5 \text{s}$

$x = 1,5 \text{m}$ (le mobile revient vers A)

⑥ **1.**



le mobile va de O à A d'un mouvement uniformément accéléré ($a = 1\ m.s^{-2}$)

$x_0 = 0$

$v_0 = 0$

v_A

$v_A^2 - v_0^2 = 2.a.(x_A - x_0) = 2.a.OA$

$OA = \dfrac{v_A^2}{2a} = 450\ m$

le mobile va de A à B d'un mouvement uniforme de vitesse $v = 108\ km.h^{-1}$ ($30\ m.s^{-1}$)

$x_B - x_A = v.(t_B - t_A) = 600\ m$

distance totale : $450 + 600 = 1\,050\ m$.

2.

$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$

$\boxed{x = \frac{1}{2}.t^2}$

arc de parabole

$x_A = 450\ m$

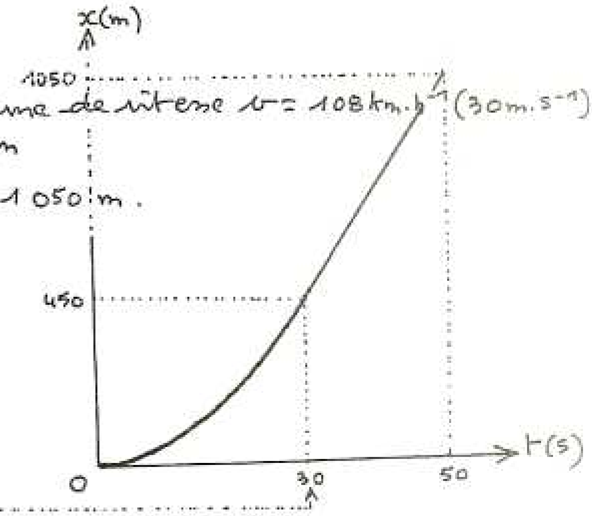
$t = \pm\sqrt{900} = +30\ s$

$x - x_A = v(t - t_A)$

$x - 450 = 30(t - 30)$

$\boxed{x = 30t - 450}$

segment de droite



3.

$t'_C = 0$

$x'_C = 0$

début du freinage

c'est un mouvement uniformément varié (retardé)

$\vec{a}'$ est en sens inverse du mouvement

$a' = -4\ m.s^{-2}$

$x' = \frac{1}{2}a't'^2 + v_0 t' + x'_0$

$v_0 = v_C = 30\ m.s^{-1}$ (v_A, v_B)

$x'_0 = x'_C = 0$

$CD = 112,5\ m$

$\boxed{x' = -2.t'^2 + 30t'}$

$x'_D = 112,5\ m$ $\qquad t' = t'_D$?

$2.t_D'^2 - 30.t'_D + 112,5 = 0$ équation du 2° degré

$t'_D = 7,5\ s$ (durée du freinage)

à t' quelconque :

$v = a't + v_0$

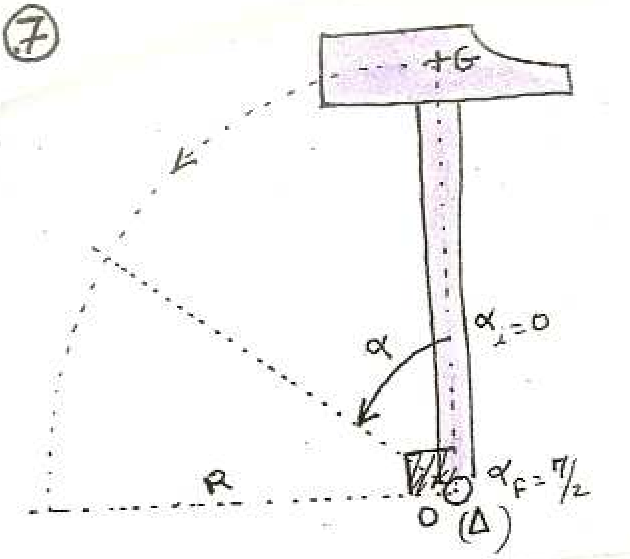
$v = -4t + 30$

à $t' = t'_D = 7,5\ s$

$v = -4 \times 7,5 + 30 = 0\ m.s^{-1}$

le mécanicien a freiné jusqu'à l'arrêt.

7



1) $\dot{\alpha} = \dfrac{d\alpha}{dt}$

(vitesse angulaire rad.s^{-1})

$\alpha = \dot{\alpha}.t + \alpha_0$ (à $t=0$ $\alpha_0 = 0$)

$\alpha = \dot{\alpha}.t$

$\ddot{\alpha} = \dfrac{d\dot{\alpha}}{dt}$

$\dot{\alpha} = \ddot{\alpha}.t + \dot{\alpha}_0$ (à $t=0$ $\dot{\alpha}_0 = 0$)

$\dot{\alpha} = \ddot{\alpha}.t$

$\alpha = 1/2.\ddot{\alpha}.t^2 + \dot{\alpha}_0.t + \alpha_0$

$\alpha = 1/2.\ddot{\alpha}.t^2$ équation horaire du mouvement du marteau $\alpha = f(t)$

2) $\boxed{t = \sqrt{\dfrac{2.\alpha}{\ddot{\alpha}}}} \simeq 0{,}125\,s$

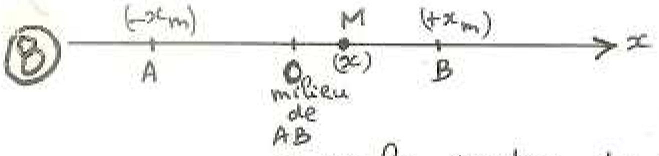
3) $\boxed{\dot{\alpha} = \ddot{\alpha}.t} \simeq 25{,}1$ rad.s^{-1} (ω)

4) $\boxed{v = \dot{\alpha}.R} \simeq 12{,}5$ m.s^{-1}

5) $a_N = \omega^2.R \simeq 315$ m.s^{-2}

$a_T = \ddot{\alpha}.R \simeq 400$ m.s^{-2}

8



(x : élongation de M)

O est le centre du mouvement

1. le mouvement a pour pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi.f = 40\pi \, rad.s^{-1}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{loi horaire}\\ x = x_m.\cos(\omega t - \varphi)\end{array}}$$

$$x = x_m.\cos(40\pi.t - \varphi)$$

constantes (elles sont déterminées par l'état de mouvement initial)

- $t = 0$ (mobile en O) $x_0 = 0$

$v_0 = 0{,}5 \, m.s^{-1}$

$x_0 = x_m.\cos(40\pi.0 - \varphi) = x_m.\cos\varphi = 0$

$\cos\varphi = 0$

$\varphi = \frac{\pi}{2} \, rad$

$$\left[v = \frac{dx}{dt} = -x_m.\omega.\sin(\omega t - \varphi)\right]$$

$v_0 = -x_m.\omega.\sin\varphi = 0{,}5$

$x_m.\omega.\sin\varphi = 0{,}5$

$x_m = \frac{0{,}5}{\omega.\sin\varphi} = \frac{0{,}5}{40\pi.\sin\pi/2}$

$x_m \simeq 3{,}98.10^{-2} \, m$

- $$\boxed{x = 3{,}98.10^{-2}\cos\left(40\pi.t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

- $AB = 2.x_m \simeq 7{,}96 \, mm$

2. pour un mouvement harmonique (ou sinusoïdal)

$$\ddot{x} + \omega^2.x = 0$$

accélération $a = \ddot{x} = -\omega^2.x$

en A : $x_A = -x_m = -3{,}98.10^{-3} \, m$

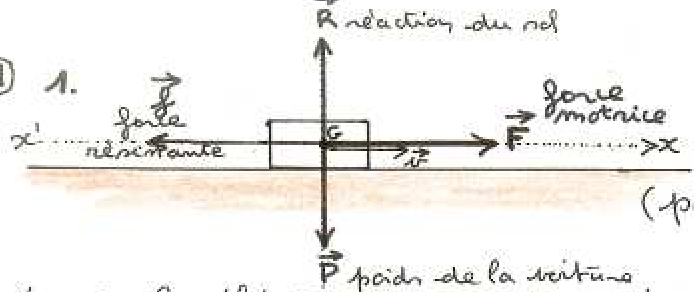
$a_A = -(40\pi)^2.(-3{,}98.10^{-3}) = 62{,}8 \, m.s^{-2} = a_A$

$\vec{a}_A$ est dirigé dans le sens positif ... vers O

il est centripète

DYNAMIQUE et MOUVEMENT

① 1.



la voiture a un mouvement de translation rectiligne uniforme (par rapport au repère terrestre)

$\vec{a} = \vec{0}$

d'après le théorème du centre d'inertie

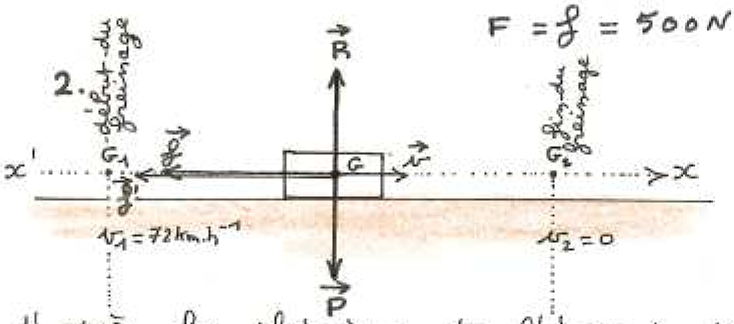
$$\boxed{\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}}$$

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{R} + \vec{f} = m \cdot \vec{a} = \vec{0}$$

$$0 + F + 0 - f = 0 \quad \text{(projection sur } x'x\text{)}$$

$$F = f = 500\,N$$

2.



d'après le théorème de l'énergie cinétique $\boxed{\Delta E_C = \Sigma W_{\vec{F}}}$ forces extérieures à la voiture.

$Ec_1 = \frac{1}{2} m v_1^2$ $\qquad$ $Ec_2 = \frac{1}{2} m . v_2^2 = 0$

d = 100 m

$\vec{f'}$: force de freinage constante

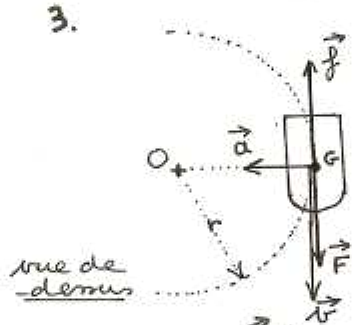
$$Ec_2 - Ec_1 = W_{\vec{P}} + W_{\vec{f'}} + W_{\vec{R}} + W_{\vec{f}} = -Ec_1$$

$$0 \quad - f'.d \quad + \quad 0 \quad - f.d = -\frac{1}{2} m v_1^2$$

$$f'.d = \frac{1}{2} m . v_1^2 - f.d$$

$$\boxed{f' = \frac{m . v_1^2}{2 . d} - f} = 1500\,N$$

3.

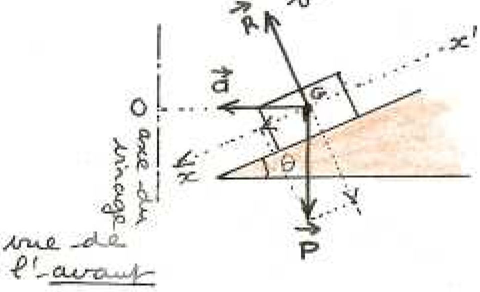


le centre d'inertie G de la voiture a un mouvement circulaire uniforme dans le repère terrestre.

- de centre O
- de rayon r = 100 m
- de vitesse $v = 20\,m.s^{-1}$ ($72\,km.h^{-1}$)
- d'accélération centripète, horizontale $a = \frac{v^2}{r}$

$$\Sigma \vec{F} = m . \vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{R} + \vec{f} = m . \vec{a}$$



$$P.\sin\theta + 0 + 0 + 0 = m.a.\cos\theta$$

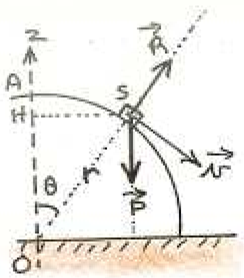
(projection sur x'x) ligne de plus grande pente du virage

$$P.\sin\theta = m.a.\cos\theta$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{m.a}{P} = \tan\theta = \frac{m.a}{m.g} = \frac{a}{g} = \boxed{\frac{v^2}{r.g} = \tan\theta}$$

$$\theta \simeq 22{,}2°$$

② 1.



dans le repère terrestre le petit solide S a un mouvement circulaire

- <u>théorème de l'énergie cinétique</u> $\Delta E_c = \sum W$

en A : $Ec_1 = 0$

position z quelconque : $Ec_2 = \frac{1}{2}.m.v^2$

- pendant la descente $\vec P$ et $\vec R$ travaillent :

$$W_{\vec P} = m.g.(z_A - z) = m.g.(OA - OH) = m.g.(r - r.\cos\theta)$$

$$W_{\vec R} = 0 \quad (\vec R \perp \vec v)$$

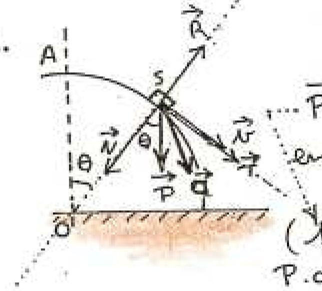
- $\Delta E_c = Ec_2 - Ec_1 = \frac{1}{2}.m.v^2$

$\sum W = m.g.r.(1-\cos\theta)$

$$\frac{1}{2}.m.v^2 = m.g.r.(1-\cos\theta)$$

$$\boxed{v = \sqrt{2.g.r.(1-\cos\theta)}}$$

2.



$$\sum \vec F = m.\vec a$$

$$\vec P + \vec R = m.\vec a$$

en coordonnées curvilignes $\vec a = a_T.\vec T + a_N.\vec N$

$$\vec a = \dot v.\vec T + \frac{v^2}{r}.\vec N$$

(projection sur $(S,\vec N)$)

$$P.\cos\theta - R = m.\frac{v^2}{r}$$

$$\boxed{R = m.g.(3\cos\theta - 2)}$$

3. $R = f(\theta) = m.g.(3\cos\theta - 2)$

étudions la variation de cette fonction lorsque S descend à partir de A.

θ	0	$\nearrow$			$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\searrow$			0
$f(\theta)$	m.g	$\searrow$ >0	0	<0 $\searrow$	−2 m.g

f s'annule en changeant de signe.

S décolle car R ne peut pas être négatif et ne peut pas changer de sens.

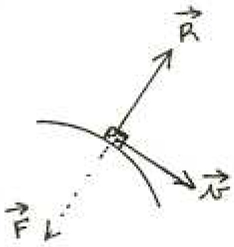
$\theta = \theta_0$

$$\boxed{R = m.g.(3\cos\theta_0 - 2) = 0}$$

$$\cos\theta_0 = \frac{2}{3}$$

$$\theta_0 \simeq 48,2°$$

4.



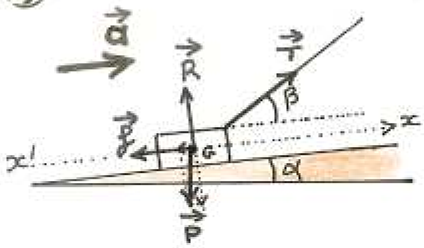
le demi-cylindre exerce sur S la force $\vec R$.

d'après la loi des actions réciproques

$$\vec F = -\vec R$$

$$\boxed{F = R}$$

③



Dans le repère terrestre le centre d'inertie du « système » traîneau a un <u>mouvement rectiligne uniformément varié</u>

- le vecteur accélération $\vec{a}$ est parallèle à l'axe x'x sur lequel se déplace G et de même sens que le mouvement car celui-ci est accéléré.
- <u>théorème du centre d'inertie</u>

$$\Sigma \vec{F} = m.\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f} = m.\vec{a}$$

$$-P.\sin\alpha + 0 + T.\cos\beta - f = m.a \quad \text{(projection sur x'x)}$$

soit $T.\cos\beta = P.\sin\alpha + f + m.a$

connues

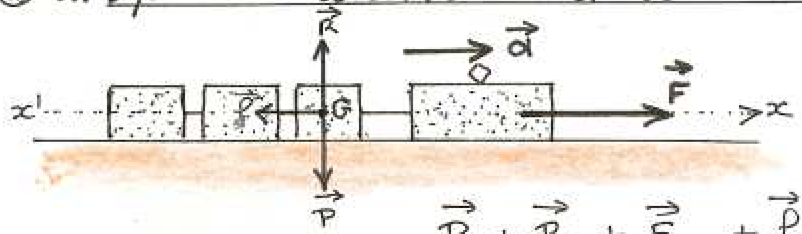
$\sin\alpha \simeq 0{,}1$

$f = 0{,}2 \times 200$

$a = \dfrac{v^2 - v_0^2}{2(x - x_0)} \simeq 0{,}5\ m.s^{-2}$

$T \simeq 393\ N$

④ 1. <u>système locomotive et les trois wagons</u> (repère : terre)



$$\Sigma \vec{F} = m.\vec{a}$$

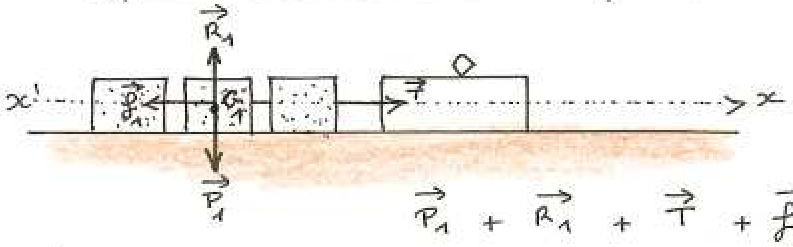
$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f} = (M + 3m).\vec{a}$$

(projection sur x'x) $\quad 0 + 0 + F - f = (M + 3m).a$

$$\boxed{a = \frac{F - f}{(M + 3m)}} = 0{,}5\ m.s^{-2}$$

mouvement rectiligne uniformément accéléré

2. <u>système les trois wagons</u>



$$\Sigma \vec{F} = m.\vec{a}$$

$$\vec{P_1} + \vec{R_1} + \vec{T} + \vec{f_1} = 3m.\vec{a}$$

(projection sur x'x) $\quad 0 + 0 + T - f_1 = 3m.a$

$$\boxed{T = f_1 + 3ma} = 60\ kN$$

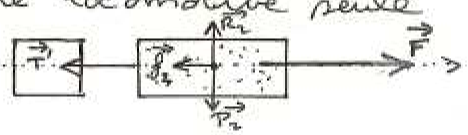
<u>remarque</u> on aurait pu prendre le <u>système locomotive seule</u>

$-f_2 + F - T' = M.a$

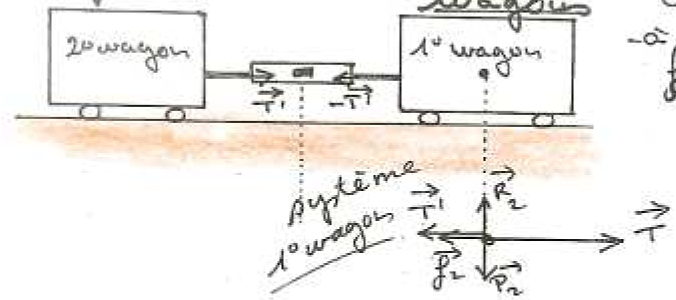
$T' = F - M.a - f_2$

$T' = 60\ kN$

etc.



3. système les 2 derniers wagons



le dynamomètre tendu exerce à chacune de ses extrémités des forces opposées $\vec{T'}$ et $-\vec{T'}$

on lit la valeur T' sa tension.

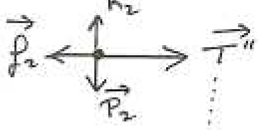
$$\vec{P_2} + \vec{R_2} + \vec{T} + \vec{f_2} + \vec{T'} = m.\vec{a}$$

$$0 + 0 + T - f_2 - T' = m.a$$

soit $\boxed{T' = T - f_2 - m.a}$

$$T' = 40\ kN$$

4. système dernier wagon



$$\vec{P_2} + \vec{R_2} + \vec{T''} + \vec{f_2} = m.\vec{a}$$

$$0 + 0 + T'' - f_2 = m.a$$

$$T'' = f_2 + m.a$$

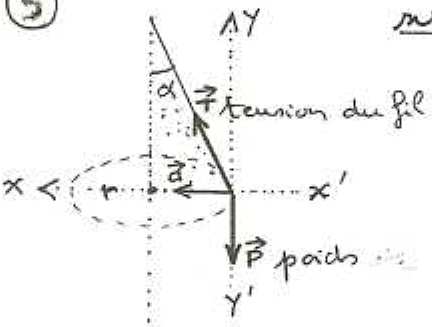
$$T'' = 20\,kN$$

tension du ressort

$$T'' = k.(\ell - \ell_0)$$

$$\boxed{\ell = \ell_0 + \frac{T''}{k}} = 40\ cm$$

5



système masse ponctuelle (repère : terre)

mouvement circulaire uniforme

$\vec{a}$ vecteur accélération centripète

$a = r.\omega^2$ $\qquad a = \ell.\sin\alpha.\,\omega^2$

$r = \ell.\sin\alpha$

$$\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{T} = m.\vec{a}$$

$0 + T.\sin\alpha = m.a$ (projection sur x'x)

$-P + T.\cos\alpha = 0$ (projection sur y'y)

$$T\sin\alpha = m.a$$

$$T\cos\alpha = m.g$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{g} = \frac{\ell.\sin\alpha.\,\omega^2}{g} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2.\ell}}$$

$$\alpha = 31{,}1°$$

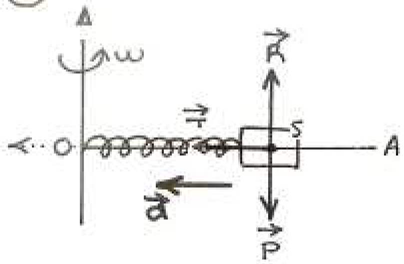
$$T.\cos\alpha = m.g$$

$$T.\frac{g}{\omega^2.\ell} = m.g$$

$$\boxed{T = m.\omega^2.\ell}$$

$$T \simeq 0{,}853\ N$$

⑥



système solide S (repère terre)

le ressort garde une longueur constante $\ell_0 + b$

la masse ponctuelle décrit un cercle à vitesse constante

$\vec{a}$ est centripète

$a = (\ell_0 + b) \cdot \omega^2$

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}$$

$0 + 0 + T = m \cdot (\ell_0 + b) \cdot \omega^2$ (projection sur AO)

$T = k \cdot b$

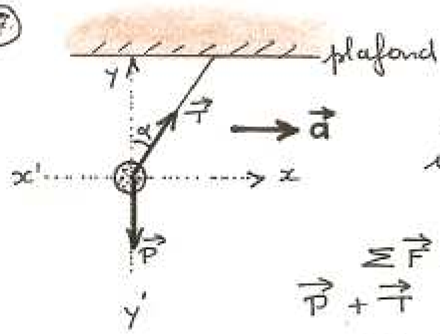
$$k \cdot \mathbf{b} = m \cdot (\ell_0 + \mathbf{b}) \cdot \omega^2$$

$$k \cdot b = m \cdot \ell_0 \cdot \omega^2 + m \cdot b \cdot \omega^2$$

$$b \cdot (k - m \cdot \omega^2) = m \cdot \ell_0 \cdot \omega^2$$

$$\boxed{\mathbf{b} = \frac{m \cdot \ell_0 \cdot \omega^2}{k - m \cdot \omega^2}}$$

⑦



système petite sphère (repère terre)

une fois stabilisée dans le wagon, la petite sphère a la **même** accélération $\vec{a}$ que le wagon par rapport

$\vec{a}$ horizontal.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}$$

$0 + T \cdot \sin\alpha = m \cdot a$ (projection sur $x'x$)

$-P + T \cdot \cos\alpha = 0$ (projection sur $y'y$)

$T \cdot \sin\alpha = m \cdot a$

$T \cdot \cos\alpha = m \cdot g$

$\boxed{\tan\alpha = \dfrac{a}{g}}$ $\alpha \simeq 11{,}5°$

(ou) $\sin\alpha \simeq 0{,}2$

$T = \dfrac{m \cdot a}{\sin\alpha}$

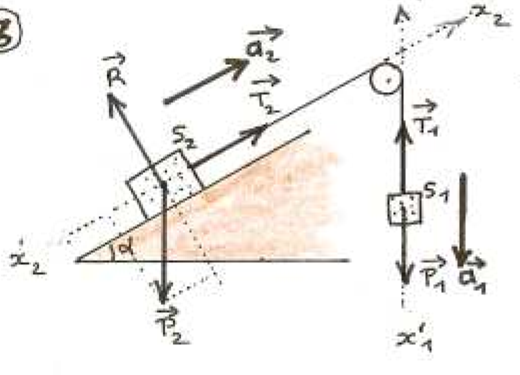
$T^2 \cdot \sin^2\alpha = m^2 \cdot a^2$

$T^2 \cdot \cos^2\alpha = m^2 \cdot g^2$

$T^2 \cdot (\underbrace{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}_{1}) = m^2 \cdot (a^2 \cdot g^2)$

$\boxed{T = m \cdot \sqrt{a^2 + g^2}} \simeq 1\,N$

⑧



• le solide S_1, dans le repère terrestre a un **mouvement de translation rectiligne** le long de x'_1x_1.

son vecteur accélération $\vec{a_1}$ est colinéaire à x'_1x_1.

$$\Sigma \vec{F} = m_1 \cdot \vec{a_1}$$

$$\vec{P_1} + \vec{T_1} = m_1 \cdot \vec{a_1}$$

$-P_1 + T_1 = m_1 \cdot a_1$ (projection sur x'_1x_1)

• le solide S_2 a un mouvement de translation rectiligne le long de x'_2x_2. $\vec{a_2}$ est colinéaire à x'_2x_2

$$\Sigma\vec{F} = m_2.\vec{a_2}$$

$$\vec{P_2} + \vec{R} + \vec{T_2} = m_2.\vec{a_2}$$

$$-P_2.\sin\alpha + 0 + T_2 = m_2.a_2$$

• Le fil et la poulie sont de masse négligeable, la poulie est sans frottement, donc les deux brins du fil ont la même tension. $\boxed{T_2 = T_1}$

• le fil est inextensible
donc à chaque instant S_1 et S_2 ont la même vitesse
la même accélération
$a_1 = a_2$

$$P_2.\sin\alpha - T_2 = -m_2.a_2$$

$$\text{et } -P_1 \quad + T_1 = m_1.a_1$$

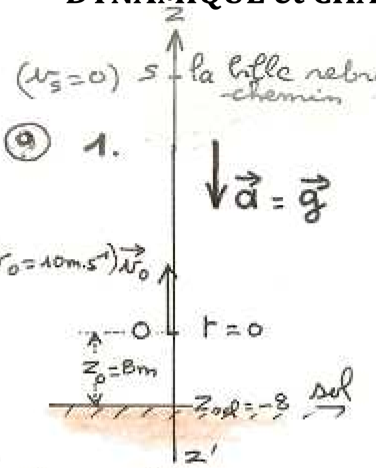
$$P_2.\sin\alpha - P_1 = (m_1 - m_2).a_1$$

$$a_1 = \frac{P_2.\sin\alpha - P_1}{m_1 - m_2}$$

$$\boxed{a_1 = \frac{-m_1 + m_2.\sin\alpha}{m_1 - m_2}.g} \simeq -4,9 \ m.s^{-2}$$

$a_1 < 0$, il a le sens négatif.
lâché sans vitesse S_1 descend.
le mouvement est uniformément varié
(a_1 constant)
(il est accéléré)

DYNAMIQUE et CHAMP de PESANTEUR



(9) 1. $\vec{a} = \vec{g}$

le mouvement est rectiligne.
le centre d'inertie de la bille reste sur l'axe vertical z'Oz d'origine O, orienté vers le haut.

- l'action de l'air étant négligé, la bille n'est soumise qu'à son poids $\vec{P}$

$$\vec{P} = m.\vec{g} = m.\vec{a}$$

$$\boxed{\vec{g} = \vec{a}}$$

$$a = -g$$

<u>mouvement rectiligne uniformément varié</u>

$$\begin{pmatrix} v = at + v_0 \\ v = -g.t + v_0 \end{pmatrix}$$

- $v_s^2 - v_0^2 = 2.a.(z_s - z_0)$

$0 - v_0^2 = 2.a.z_s = -2.g.z_s$

<u>autre méthode</u>

$\Delta E_C = \Sigma W \vec{F}_{(ext)}$

$\frac{1}{2} m v_s^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -P.z_s$

$0 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -m.g.z_s$

$$\boxed{z_s = \frac{v_0^2}{2.g}} \simeq 5,1 m$$

2. <u>loi horaire de cette chute libre</u>

$$z = \frac{1}{2}.a.t^2 + v_0.t + z_0$$

$$\boxed{z = -4,9.t^2 + 10.t}$$

arrivée au sol $z = -8$

$-4,9.t^2 + 10t = -8$ .... $t \simeq 2,65 s$

(10) • <u>première balle</u> $z = \frac{1}{2}.a.t^2 + v_0.t + z_0$

(1) $z = -4,9.t^2 + 8.t$

• <u>deuxième balle</u> $z = \frac{1}{2}.a.t^2 + v_0.t + z_0$

(2) $z = -4,9.t'^2 + 6.t'$

la deuxième balle partant 1s après la première $t' = t - 1$.

(3) $z = -4,9.(t-1)^2 + 6.(t-1)$

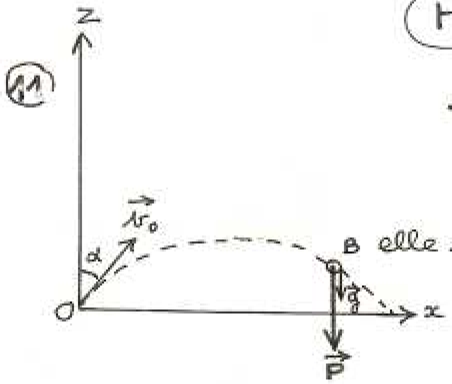
• <u>rencontre</u> ... les deux balles ont même z au même instant t.

(1) = (3)

$$-4,9.t^2 + 8t = -4,9.(t-1)^2 + 6.(t-1)$$

$t = 1,4 s$ et par suite $z = 1,61 m$

(11)



1. dans le repère terrestre, la balle B, lancée à la vitesse $\vec{v}_0$ est soumise à son poids $\vec{P}$ vertical.
(action de l'air négligeable)

B elle reste dans le plan vertical contenant O et $\vec{v}_0$

- état initial $t=0$ B en O

$$x_0 = 0$$
$$z_0 = 0$$
$$\vec{v_0}\left|\begin{array}{l}\dot{x}_0 = v_0 . \sin\alpha \\ \dot{z}_0 = v_0 . \cos\alpha\end{array}\right.$$

- à t quelconque $\vec{P} = m . \vec{a}$

$$\vec{a} = \frac{\vec{P}}{m} = \vec{g} \quad (\text{-constant})$$

dans le repère Ox, Oz

$$\vec{a}\left|\begin{array}{ll}\ddot{x} = 0 & (\vec{g} \perp Ox) \\ \ddot{z} = -g & (\vec{g} \,//\, Oz)\end{array}\right.$$

intégrons

$$\vec{v}\left|\begin{array}{l}\dot{x} = \text{constante} = \dot{x}_0 = v_0 . \sin\alpha \\ \dot{z} = -g.t + \dot{z}_0 \quad = -g.t + v_0 . \cos\alpha\end{array}\right.$$

intégrons de nouveau

$$B\left|\begin{array}{l}x = v_0 . \sin\alpha . t + x_0 \\ z = -\frac{1}{2}.g.t^2 + v_0 . \cos\alpha . t + z_0\end{array}\right.$$

lois horaires du mouvement

$$\boxed{\begin{array}{l}x = 16 . \sin\alpha . t \\ z = -4{,}9 . t^2 + 16 . \cos\alpha . t\end{array}}$$

ce sont les équations paramétriques de la trajectoire.

pour obtenir l'équation cartésienne $z = F(x)$ il faut éliminer t entre les lois horaires.

2. $t = \dfrac{x}{16 . \sin\alpha}$

$$z = -4{,}9 . \left(\frac{x}{16 . \sin\alpha}\right)^2 + 16 . \cos\alpha . \frac{x}{16 . \sin\alpha}$$

$$\boxed{z = -\frac{1{,}95 . 10^{-2}}{\sin^2\alpha} . x^2 + \cot g\,\alpha \;. x} \quad \ldots (z = A . x^2 + B . x)$$

la trajectoire est un arc de parabole

3.

$\vec{v_s} \,//\, Ox \quad \dot{z}_s = 0$

$$\dot{z}_s = -g t_s + v_0 . \cos\alpha = 0$$

$$\boxed{t_s = \frac{v_0 . \cos\alpha}{g}} \simeq 1{,}03\,s$$

$$\vec{v_s}\left|\begin{array}{l}\dot{x}_s = v_0 . \sin\alpha \\ \dot{z}_s = 0\end{array}\right.$$

$$v_s = \sqrt{\dot{x}_s^2 + \dot{z}_s^2} \quad \boxed{v_s = |\dot{x}_s| = v_0 . \sin\alpha} \simeq 12{,}3\,m.s^{-1}$$

4. $t_s = \dfrac{v_0 . \cos\alpha}{g}$

$$z_s = -\frac{1}{2} . g . t_s^2 + v_0 . \cos\alpha . t_s$$
$$= -\frac{1}{2} . g . \left(\frac{v_0 . \cos\alpha}{g}\right)^2 + v_0 . \cos\alpha . \frac{v_0 . \cos\alpha}{g}$$

$$\boxed{z_s = \frac{v_0^2 . \cos^2\alpha}{2g}} \simeq 5{,}29\,m$$

autres solutions pour trouver z_s

$$z = -\frac{g}{2 v_0^2 \sin^2\alpha} \cdot x^2 + \mathrm{cotg}\,\alpha \cdot x$$

(pour $x = x_s$) $\frac{dz}{dx} = 0 = -\frac{g}{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha} \cdot x_s + \mathrm{cotg}\alpha$

$$x_s = \frac{v_0^2 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha}{g}$$

$$z_s = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin^2\alpha} \cdot x_s^2 + \mathrm{cotg}\alpha \cdot x_s = \frac{v_0^2 \cdot \cos^2\alpha}{2g}$$

2) le **système** (B, terre) est conservatif

en O : $E_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 + 0$ (en prenant $E_p = 0$ en O)

en S : $E_2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_S^2 + m \cdot g \cdot z_s$

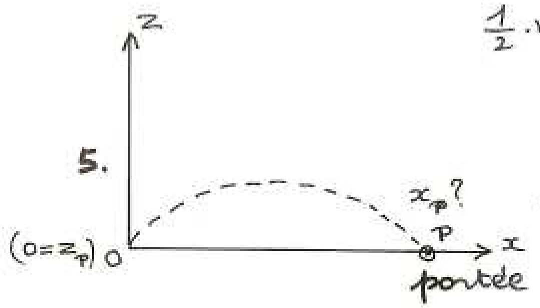
$v_S = v_0 \cdot \sin\alpha$

$$E_2 = E_1$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_S^2 + m \cdot g \cdot z_s$$

$$z_s = \frac{v_0^2 - v_S^2}{2g} = \frac{v_0^2 \cdot \cos^2\alpha}{2g}$$

5.



1° solution : $z = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin^2\alpha} \cdot x^2 + \mathrm{cotg}\alpha \cdot x$

$(z_p = 0)$ $\quad 0 = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin^2\alpha} \cdot x_p^2 + \mathrm{cotg}\alpha \cdot x_p$

soit $\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin^2\alpha} x_p = \mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$$\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin\alpha} x_p = \cos\alpha$$

$(2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha)$

$$\boxed{x_p = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}}$$

2° solution : $z = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t$

$(z_p = 0)$ $\quad 0 = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_p^2 + v_0 \cos\alpha \cdot t_p$

(car t_p ne veut rien dire) $t_p = \frac{2 v_0 \cdot \cos\alpha}{g}$

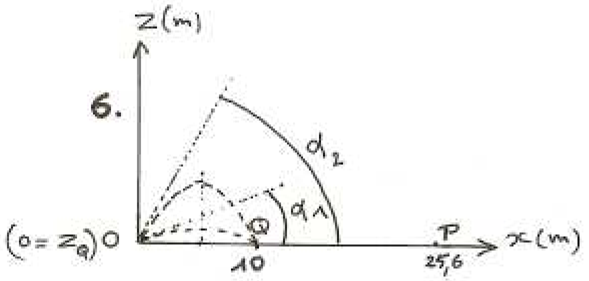
$$x_p = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t_p = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$$

- x_p **maximale** quand $\sin 2\alpha = 1$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{4}}$ alors $x_p = 25{,}6$ m

6.



$$z_Q = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin^2\alpha} \cdot x_Q^2 + \mathrm{cotg}\,\alpha \cdot x_Q$$

$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \mathrm{cotg}^2\alpha$

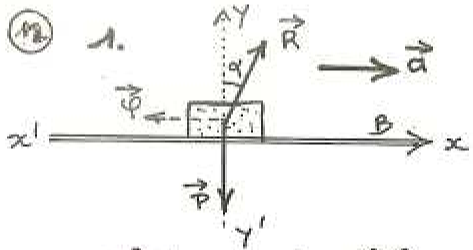
$$0 = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2} \cdot (1 + \mathrm{cotg}^2\alpha) + \mathrm{cotg}\,\alpha \cdot x_Q$$

$$\frac{g \cdot x_Q}{2 v_0^2} \cdot \mathrm{cotg}^2\alpha - \mathrm{cotg}\,\alpha + \frac{g \cdot x_Q}{2 v_0^2} = 0$$

soit $\mathrm{cotg}\,\alpha_1 = 4{,}92$ ($\alpha_1 \simeq 11{,}5°$) et $\mathrm{cotg}\,\alpha_2 = 0{,}203$ ($\alpha_2 \simeq 78{,}5°$)

(ce sont des angles complémentaires)

(12) 1.



système solide S (repère lié à la plaque B)
« ce repère n'est pas un repère galiléen »

$\vec{a}$ accélération d'entraînement.
$\vec{\varphi}$ force d'inertie $\vec{\varphi} = -m.\vec{a}$
(elle n'est pas due à un objet)

solide en équilibre
$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$
$\vec{P} + \vec{R} + \vec{\varphi} = \vec{0}$

• si $\alpha = 30°$
$\vec{a}$ valeur maximale

$0 + R.\sin\alpha - \varphi = 0$ (projection sur x'x)

$R.\sin\alpha = m.a$

$-P + R.\cos\alpha + 0 = 0$ (projection sur y'y)

$R.\cos\alpha = P = m.g$

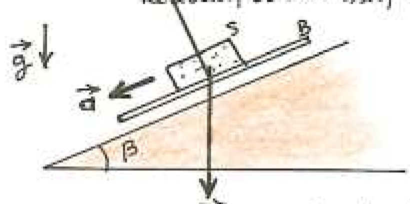
$\tan\alpha = \dfrac{a}{g}$

$\boxed{a_{max} = g.\tan 30} \simeq 5{,}66\ m.s^{-2}$

2. a) système plaque et solide (repère galiléen : laboratoire)
le solide (B,S) prend l'accélération $\vec{a}$ telle que $\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}$

$\vec{R'}$ réaction du coussin d'air sur (B,S)

$\vec{P'} + \vec{R'} = M'.\vec{a}$



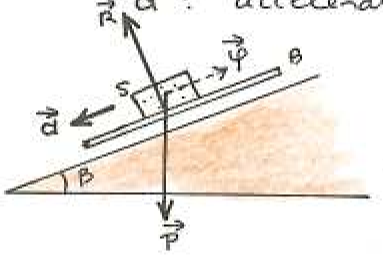
$M'.\vec{g} - M'.\vec{a} = -\vec{R'}$

$\vec{g} - \vec{a} = -\dfrac{\vec{R'}}{M'}$

$\vec{g} - \vec{a}$ a la direction de $\vec{R'}$
a le sens opposé de $\vec{R'}$

$\vec{P'}$ poids de (B,S)
$P' = M'.g$
masse de (B,S)

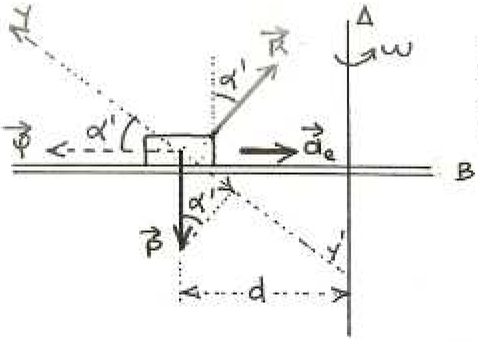
b) système solide (repère non galiléen lié à la plaque B)
$\vec{a}$: accélération d'entraînement de S, en équilibre sur B



condition d'équilibre
$\Sigma\vec{F} = \vec{0}$
$\vec{P} + \vec{R} + \vec{\varphi} = \vec{0}$
$m.\vec{g} + \vec{R} - m.\vec{a} = \vec{0}$
$m(\vec{g} - \vec{a}) = -\vec{R}$
$(\vec{g} - \vec{a}) = -\dfrac{\vec{R}}{m}$
$\vec{g} - \vec{a}$: vecteur perpendiculaire à B
$\vec{R}$ est perpendiculaire à B
(il y aurait donc équilibre de S sur B même s'il n'y avait pas de frottements entre B et S)

remarque
poids apparent de S, dans le repère lié à B
$m\vec{g} + \vec{\varphi} = \vec{P_a} = m(\vec{g} - \vec{a})$
$\vec{P_a} = -\vec{R}$

3.



solide S en équilibre sur B

système solide (repère non galiléen lié à la plaque B).

l'accélération d'entraînement de S (quasi ponctuel) est $\vec{a}_e$ (vecteur axipète)

$$a_e = d.\omega^2$$

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{\varphi} = \vec{0}$$

(projection sur y'y) $-P.\sin\alpha' + 0 + \varphi.\cos\alpha' = 0$

$P = m.g \qquad \varphi = m.a_e = m.d.\omega^2$

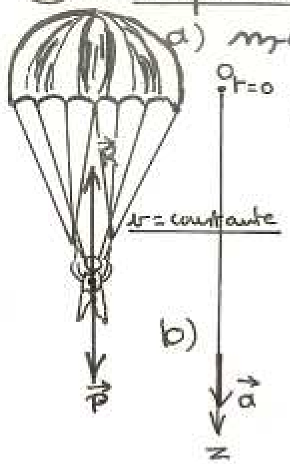
$$P.\sin\alpha' = \varphi.\cos\alpha'$$

$$m.g.\sin\alpha' = m.d.\omega^2.\cos\alpha'$$

$$\boxed{\tan\alpha' = \frac{d.\omega^2}{g}}$$

$\alpha' \simeq 28{,}7°$ ($< 30°$ l'équilibre est possible)

13 **1. le parachutiste**



a) mouvement de translation rectiligne uniforme $(\vec{a} = 0)$

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$
$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$
$$P = \boxed{R = (M+m).g} = 1\,kN$$

la valeur de la résistance de l'air est égale au poids quel que soit la valeur de la vitesse (pourvu qu'elle soit constante).

b)
$$\Sigma \vec{F} = (M+m).\vec{a} \quad \text{(théorème du centre d'inertie)}$$
$$\vec{P} + \vec{R} = (M+m).\vec{a}$$
$$P - \underset{0,6.P}{R} = (M+m).a \quad \text{(projection sur Oz)}$$

$$(M+m).g - 0,6.(M+m).g = (M+m).a$$

$$\boxed{a = 0,4.g} \simeq 3,9\ m.s^{-2}$$

le mouvement du centre d'inertie est uniformément varié (accéléré)

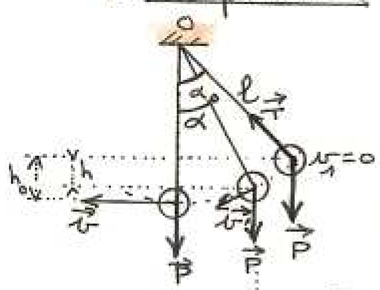
$$z = \frac{1}{2}.a.t^2 + v_0.t + z_0 \quad (v \text{ augmente})$$
$$v_0 = 0 \quad z_0 = 0$$

$$z = \frac{1}{2}at^2 \qquad \boxed{z = 1,95.t^2}$$

$$z = H = 300\,m \qquad t = \sqrt{\frac{z}{1,95}} \simeq 12,4\,s$$

$$v = at + v_0 = a.t \qquad v = 3,9.t \simeq 48,4\ m.s^{-1}\ (\simeq 174,1\,km.h^{-1})$$

2. le pendule . utilisons le théorème de l'énergie cinétique
système bille (référence terre)



$v_1 = 0 \quad Ec_1 = \frac{1}{2}.m.v_1^2$

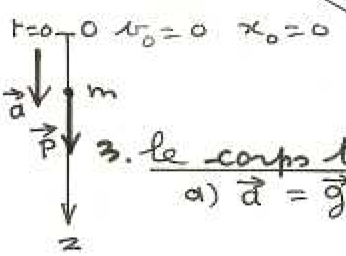
$Ec_2 = \frac{1}{2}.m.v^2$

$$\Delta E_c = \Sigma W\vec{F}$$
$$Ec_2 - Ec_1 = W\vec{P} + W\vec{T}$$
$$P.h + 0$$

$\vec{T}$ est constamment perpendiculaire au déplacement de son point d'application

$$\frac{1}{2}.m.v'^2 = P.h \qquad v' = \sqrt{2.g.h}$$
$$h = \ell.\cos\alpha - \ell.\cos\alpha_0 = \ell(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$$
$$\frac{1}{2}.m.v^2 = P.h_0 \qquad v = \sqrt{2.g.h_0}$$
$$h_0 = \ell - \ell\cos\alpha_0$$

$$\boxed{v' = \sqrt{2.g.\ell.(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}} \simeq 2,7\ m.s^{-1}$$
$$\boxed{v = \sqrt{2.g.\ell.(1 - \cos\alpha_0)}} \simeq 3,1\ m.s^{-1}$$

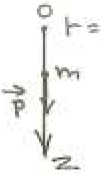


3. le corps tombe

a) $\vec{a} = \vec{g}$

$$z = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 = 4,9\,t^2$$
$$v^2 - v_0^2 = 2.a(x - x_0)$$

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{2.z}{g}}} \simeq 14,3\,s$$
$$\boxed{v = \sqrt{2.g.z}} \simeq 140\ m.s^{-1}$$



$t=0 \quad x_0=0 \quad v_0 = 3\,m.s^{-1}$

b) $z = \frac{1}{2}.a.t^2 + v_0.t + x_0 \quad = 4{,}9.t^2 + 3.t \quad \left(\frac{g}{2}.t^2 + v_0.t\right)$

$v = a.t + v_0 \quad = 9{,}8.t + 3 \quad (g.t + v_0)$

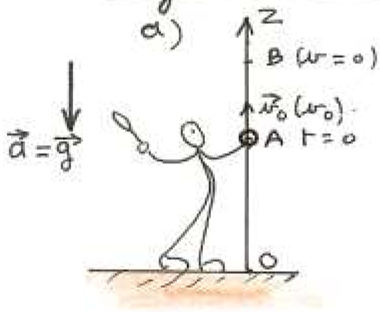
$\to 4{,}9.t^2 + 3.t - 1000 = 0$

$\underset{(>0)}{t} \simeq 14{,}0\,s$

$\to v \simeq 140{,}0\,m.s^{-1}$ $\left(\text{ou } v^2 - v_0^2 = 2.g.x \quad v^2 = v_0^2 + 2gx \quad v = \sqrt{v_0^2 + 2gx}\right)$

4. le joueur de tennis au service

a)



• mouvement de la balle rectiligne uniformément varié

$a =$ constante

$v = a.t + v_0$

$z = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + z_0$

$\begin{pmatrix} a = -g \\ v_0 = ? \\ z_0 = OA = 1{,}6\,m \end{pmatrix}$

$\to v = -g.t + v_0$

$\to z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + 1{,}6$

• v_0 ? 1° méthode

$v^2 - v_0^2 = 2.a(z - z_0) = -2.g.(z - z_0)$

$v_B = 0 \qquad z_B = 2{,}0\,m$

$v_0^2 = 2\,g\,(z_B - z_0)$

$v_0 = \sqrt{2.g.(z_B - z_0)} = 2{,}8\,m.s^{-1}$

2° méthode

$\Delta E_c = Ec_B - Ec_A = W_{AB}\vec{P}$

$0 - \frac{1}{2}m.v_0^2 = -P.\underset{(z_B - z_0)}{AB}$

$-\frac{1}{2}m\,v_0^2 = -m.g.(z_B - z_0)$

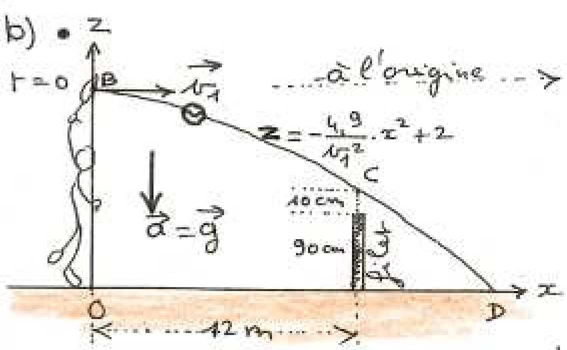
$v_0 = \sqrt{2\,g.(z_B - z_0)}$

• t (de A à B)

$v_B = -gt + v_0 = 0$

$t = \frac{v_0}{g} \simeq 0{,}29\,s$

b) •



à l'origine $\to$ $\vec{a} \begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{vmatrix}$ $\quad \vec{v} \begin{vmatrix} v_{x_0} = v_1 \\ v_{z_0} = 0 \end{vmatrix}$ $\quad B \begin{vmatrix} x_0 = 0 \\ z_0 = 2 \end{vmatrix}$

sur Ox : mouvement uniforme
sur Oz : mouvement uniformément varié

$\to z = \frac{1}{2}.a_z.t^2 + v_{z_0}.t + z_0 \quad v = a_z t + v_{z_0}$

$\boxed{z = -4{,}9.t^2 + 2}$ et $\boxed{v = -9{,}8.t}$

$\to x = v_{x_0}.t + x_0$

$\boxed{x = v_1.t}$ équations horaires du mouvement

$\boxed{z = -\frac{4{,}9}{v_1^2}x^2 + 2}$ la trajectoire est une parabole tangente en B à $\vec{v_1}$

en éliminant t entre x et z

- souhait du joueur : à 12 m de O
  z doit être égal à 1 m (90 cm + 10 cm)

$$1 = z = -\frac{4{,}9}{v_1^2}\cdot x^2 + 2$$

$$1 = -4{,}9\cdot\frac{12^2}{v_1^2} + 2 \qquad 4{,}9\cdot\frac{12^2}{v_1^2} = 1 \quad v_1^2 = 4{,}9\cdot 12^2$$

$$\boldsymbol{v_1 \simeq 26{,}6\,m.s^{-1}}\ (96\,km.h^{-1})$$

- théorème de l'énergie cinétique entre les dates correspondant à la position initiale B et au passage en C au-dessus du filet (pour calculer v_2)

$$\Delta E_C = Ec_C - Ec_B = \frac{1}{2}m.v_2^2 - \frac{1}{2}m.v_1^2$$

$$\Delta E_C = \Sigma_{BC}(\overrightarrow{F_{ext}}) = W_{BC}\vec{P} = P.\underbrace{(z_B - z_C)}_{1m = h}$$

$$\frac{1}{2}m.v_2^2 - \frac{1}{2}m.v_1^2 = m.g.h$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2.g.h$$

$$\boldsymbol{v_2} = \sqrt{v_1^2 + 2.g.h} \simeq \boldsymbol{26{,}9\,m.s^{-1}}$$

- en D, $z_D = 0$ la balle frappe le sol.

$$z = -\frac{4{,}9}{v_1^2}\cdot x^2 + 2 = 0$$

$$x^2 = \frac{2v_1^2}{4{,}9}$$

$$\boldsymbol{x} = \sqrt{\frac{2.v_1^2}{4{,}9}} \simeq \boldsymbol{+17\,m}\ \text{(−17 m n'est pas acceptable)}$$

pour calculer v_3 1° méthode

$$\Delta E_C = Ec_D - Ec_B = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v_3^2} - \frac{1}{2}m\,v_1^2 = W_{BP}\vec{P} = P.OB = m.g.OB$$

$$v_3^2 = v_1^2 + 2.g.OB \quad (OB = 2m)$$

$$\boldsymbol{v_3} = \sqrt{v_1^2 + 2\,g.OB} \simeq \boldsymbol{27{,}3\,m.s^{-1}}$$

2° méthode

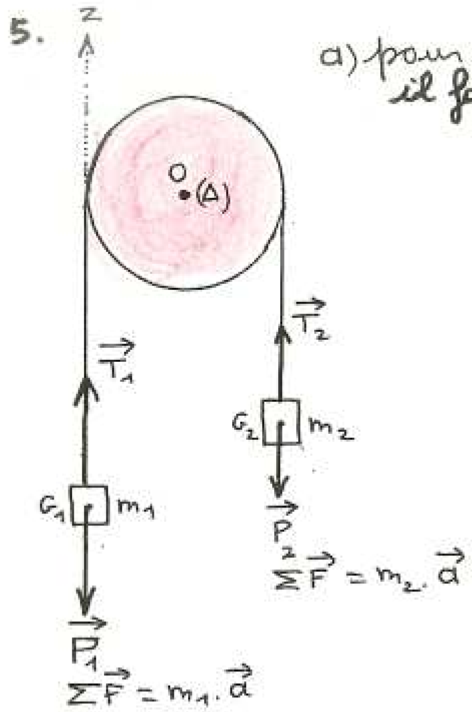
la balle arrive en D à la date $t_D = \frac{x}{v_1} \simeq 0{,}64\,s$

$$v_3\left|\begin{array}{l} v_x = v_1 = 26{,}6\,m.s^{-1} \\ v_z = -9{,}8.t_D = 6{,}26\,m.s^{-1} \end{array}\right.$$

$$v_3 = \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$$

- $t_D \simeq 0{,}64\,s$
  le relanceur dispose d'un temps très court pour évaluer la trajectoire suivie par la balle et préparer son geste de renvoi.

5.



a) pour avoir un mouvement uniformément accéléré il faut $\vec{a}$ = constante

projetons les deux relations sur l'axe z vertical

$(\vec{P_1} + \vec{T_1} = m_1.\vec{a})$

$-P_1 + T_1 = m_1.a \qquad T_1 = m_1.a + P_1$

$(\vec{P_2} + \vec{T_2} = m_2.\vec{a})$

$-P_2 + T_2 = -m_2.a \qquad T_2 = -m_2.a + P_2$

$(T_1 = T_2 = T)$
les 2 brins de fil ont la même tension!

$m_1.a + m_1.g = -m_2.a + m_2.g$

$m_1.a + m_2.a = -m_1.g + m_2.g$

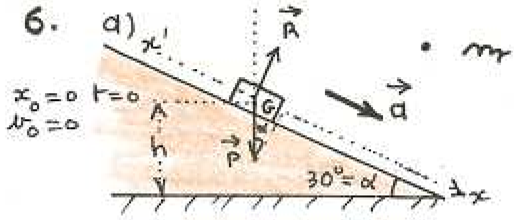
$(m_1 + m_2).a = (-m_1 + m_2).g$

$$\boxed{a = \frac{-m_1 + m_2}{m_1 + m_2}.g} \simeq 1{,}09\,m.s^{-2}$$

b) $T = m_1.a + m_1.g$

$$\boxed{T = m_1.(a+g)} \simeq 13{,}1\,N$$

6. a)



- mouvement rectiligne uniformément varié (accéléré)

a constant

$\Sigma \vec{F} = m.\vec{a}$

$\vec{P} + \vec{R} = m.\vec{a}$

$P.\sin\alpha + 0 = m.a$ (projection sur x'x)

$P.\sin\alpha = m.a \qquad m.g.\sin\alpha = m.a$

$a = g.\sin\alpha$

$a \simeq 4{,}905\,m.s^{-2}$

$x = \frac{1}{2}.a.t^2 + v_0.t + x_0$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}.a.t^2}$$

autre méthode
$\Delta E_c = W\vec{P}$
$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = P.h$
$v^2 = 2gh$
$v = \sqrt{2gh}$

- $v = a.t + v_0$

$v = a.t \qquad v^2 - v_0^2 = 2.a.(x - x_0)$

$v^2 = 2.a.x$

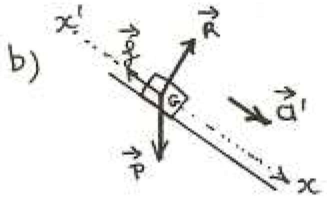
$v = \sqrt{2.a.x}$

$x = \frac{h}{\sin 30}$

$v = 7{,}7\,m.s^{-1}$

$t = \frac{v}{a} \simeq 1{,}56\,s$

b)



$\vec{f}$: force de frottement.

$\Sigma \vec{F} = m.\vec{a'}$

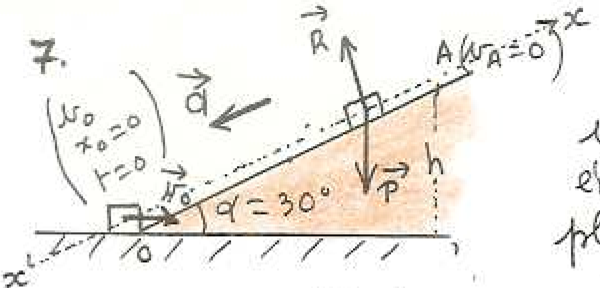
$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m.\vec{a'}$

$P.\sin\alpha + 0 - f = m.a'$

$f = m.g.\sin\alpha - m.a'$

$$\boxed{f = m.(g.\sin\alpha - a')} \simeq 6{,}5\,N$$

7.



a) On constate que pour calculer une vitesse utiliser le théorème de l'énergie cinétique apporte une solution ... plus rapide.

$$\Delta E_c = \sum W_{\vec{F}_{ext}}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m v_A^2} - \frac{1}{2} m v_0^2 = -P.h \; (= -m.g.h)$$

travail résistant qui s'oppose au mouvement

$$\boxed{h = \frac{v_0^2}{2.g}} \simeq 29\text{ cm}$$

autre méthode

$$v_A^2 - v_0^2 = 2.a.(x_A - x_0)$$

$$-v_0^2 = 2.a.x_A$$

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{R} = m.\vec{a}$$

(projection sur x'x)

$$-P.\sin\alpha + 0 = m.a$$

$$-m.g.\sin\alpha = m.a$$

$$a = -g.\sin\alpha$$

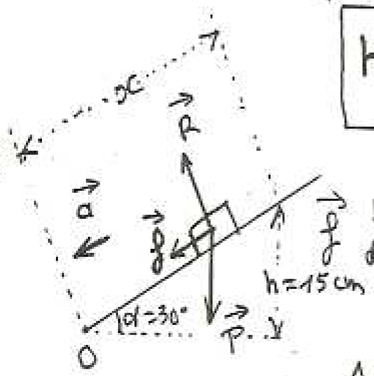
$$a = -4{,}905\ m.s^{-2}$$

$$x_A = \frac{-v_0^2}{2a} \simeq 58{,}7\text{ cm}$$

$$h = x_A.\sin 30 \simeq 29\text{ cm}$$

à vous de choisir !

b)



$\vec{f}$ forces de frottement.

$$\Delta E_c = \sum W_{\vec{F}_{ext}}$$

$$\frac{1}{2}.m.v_A^2 - \frac{1}{2}.m v_0^2 = W_{\vec{P}} + W_{\vec{f}}$$

$$-\frac{1}{2} m v_0^2 = -P.h - f.x$$

$$x = \frac{h}{\sin 30}$$

$$f.\frac{h}{\sin 30} = \frac{1}{2} m.v_0^2 - P.h$$

$$\boxed{f = \frac{m.\sin 30}{h}\left(\frac{v_0^2}{2} - g.h\right)} \simeq 1{,}4\ N$$

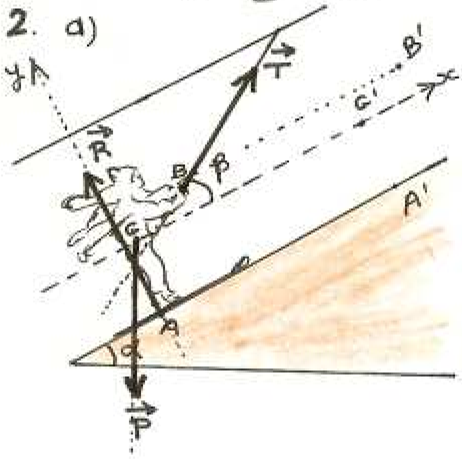
TRAVAIL – ENERGIE - PUISSANCE

(14) 1. $\vec{v}$ constante, le mouvement du skieur est ......
translation rectiligne uniforme ← on applique le principe de l'inertie

skieur en translation

$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \simeq 1\ kJ$

2. a)



les forces extérieures agissant sur le skieur sont trois forces concourantes
{ son poids $\vec{P}$
{ la tension $\vec{T}$ de la perche
{ la réaction de la piste

$\boxed{\Sigma \vec{F} = \vec{0}}$ comme en **statique** ←

$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = \vec{0}$

(1) $-P.\sin\alpha + T\cos\beta + 0 = 0$ (projection sur Gx)

(2) $-P.\cos\alpha + T.\sin\beta + R = 0$ (projection sur Gy)

2 équations 2 inconnues c'est suffisant !

(1) $T.\cos\beta = P.\sin\alpha$

$\boxed{T = m.g.\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}}$ $T \simeq 4{,}6.10^2\ N$

(2) $\boxed{R = m.g.\cos\alpha - T.\sin\beta}$ $R \simeq 4{,}6.10^2\ N$

b) travail de $\vec{P}$

$\vec{P}$ force constante
le déplacement de son point d'application est rectiligne.

$W^{\vec{P}}_{G \to G'} = \vec{P} \cdot \vec{GG'} = P.GG'.\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)$
$P.GG'(-\sin\alpha)$

$W^{\vec{P}}_{G \to G'} \simeq -40\ kJ$ *travail résistant*

travail de $\vec{T}$

$\vec{T}$ force constante
le déplacement de son point d'application est rectiligne

$W^{\vec{T}}_{BB'} = \vec{T} \cdot \vec{BB'} = T.BB'.\cos\alpha$

$W^{\vec{T}}_{B \to B'} \simeq +40\ kJ$ *travail moteur*

travail de $\vec{R}$

$\vec{R}$ force constante
le déplacement de son point d'application est rectiligne

$W^{\vec{R}}_{A \to A'} = \vec{R} \cdot \vec{AA'} = R.AA'.\cos\frac{\pi}{2}$
0

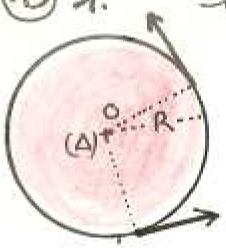
$W^{\vec{R}}_{A \to A'} = 0$ *travail nul*

3. l'énergie cinétique du skieur reste constante au cours du déplacement (m = constante, v = constante)

$\boxed{\Delta E_c = 0 \qquad \Sigma W = W^{\vec{P}}_{G \to G'} + W^{\vec{T}}_{B \to B'} + W^{\vec{R}}_{A \to A'} = 0}$

travail des forces extérieures au skieur.

15 1. le disque tourne à vitesse constante (son intensité) autour d'un axe fixe Δ.



mouvement de rotation uniforme

2. 1 tour → 2π rad

$\omega = 2\pi . n$ rad. min^{-1}

$$\omega = \frac{2\pi . n}{60} \simeq 2{,}62 \text{ rad.s}^{-1}$$

3. $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (période : durée d'un tour) $\simeq 2{,}4$ s

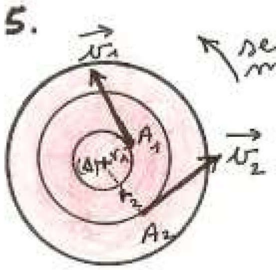
$f = \frac{1}{T}$ (fréquence : nombre de tours effectués par seconde)

$f \simeq 0{,}417$ Hz

4. $J_\Delta = \frac{1}{2} . m . R^2 \simeq 2.10^{-2}$ kg.m^2

→ disque de masse m et de rayon R par rapport à l'axe.

5.



les points A_1 et A_2 décrivent des cercles de centre O, de rayons r_1 et r_2 ... à une vitesse angulaire ω constante (celle du disque)

A_1 et A_2 ont des mouvement de rotation uniforme

chaque vecteur vitesse $\vec{v}$ a pour :

- direction : la tangente au cercle décrit par le point A
- sens : celui du mouvement
- intensité : $v = \omega . r$

$v_1 \simeq 0{,}13$ m.s^{-1}

$v_2 \simeq 0{,}39$ m.s^{-1}

6. système disque + pastille

$$J'_\Delta = \underset{\text{disque}}{J_\Delta} + \underset{\text{pastille 1}}{J_{1\Delta}} + \underset{\text{pastille 2}}{J_{2\Delta}}$$

$$\boxed{J'_\Delta = \frac{1}{2} m . R^2 + m_1 . r_1^2 + m_2 . r_2^2} \simeq 2{,}2 . 10^{-2} \text{ kg.m}^2$$

7. disque seul : $E_c = \frac{1}{2} . J_\Delta . \omega^2$

disque et pastille : $E'_c = \frac{1}{2} . J'_\Delta . \omega'^2$

si $E_c = E'_c$

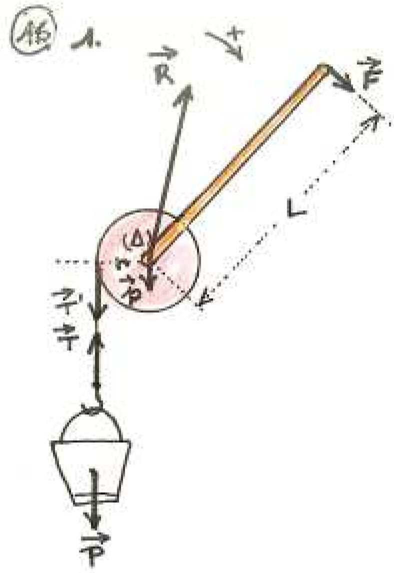
$$\frac{1}{2} . J_\Delta . \omega^2 = \frac{1}{2} J' . \omega'^2$$

$$\omega' = \left(\frac{J_\Delta}{J'_\Delta}\right)^{1/2} . \omega \simeq 2{,}5 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\omega' = \frac{2\pi n'}{60}$$

$$n' = \frac{60 . \omega'}{2\pi} \simeq 23 \text{ tours.min}^{-1}$$

(16) 1.



• le sceau a un mouvement rectiligne uniforme

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$$

$$P = T$$

• le treuil a un mouvement de rotation uniforme

$$\boxed{\Sigma \mathcal{M}_{\vec{F}/\Delta} = 0 \text{ comme en statique}}$$

$$\mathcal{M}_{\vec{P}/\Delta} + \mathcal{M}_{\vec{R}/\Delta} + \mathcal{M}_{\vec{T'}/\Delta} + \mathcal{M}_{\vec{F}/\Delta} = 0$$

$$0 + 0 - T'.r + F.L = 0$$

$(T' = T)$

$$F.L = T.r$$

$$F = \frac{T.r}{L} = \frac{P.r}{L} = \boxed{\frac{m.g.r}{L} = F} \simeq 19{,}6\,N$$

2. Travail de $\vec{F}$

$\vec{F}$ force constante
sa droite d'action est à la distance L à l'axe de rotation Δ (constante)

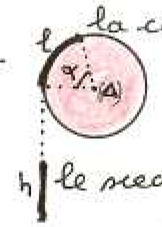
$$W^{\vec{F}} = \mathcal{M}_{\vec{F}/\Delta} . \alpha$$

$$\alpha = \frac{\ell}{r}$$

$$W^{\vec{F}} = F.L.\frac{h}{r}$$

$$W^{\vec{F}} = 9{,}8.10^2\,J$$

travail moteur



la corde s'enroule de ℓ

$h = \ell$

le sceau monte de h

Travail de $\vec{T'}$

$\vec{T'}$ force constante
sa droite d'action est à la distance r à l'axe de rotation Δ. (constante)

$$W^{\vec{T'}} = \mathcal{M}_{\vec{T'}/\Delta} . \alpha = -T.r.\alpha = -T.r.\frac{h}{r} = -T.h = -m.g.h$$

$$W^{\vec{T'}} = -9{,}8.10^2\,J$$

travail résistant

somme des travaux des forces appliquées au treuil

$$\Sigma W = W^{\vec{P}} + W^{\vec{R}} + W^{\vec{T'}} + W^{\vec{F}}$$

$$\left(\begin{matrix} 0 + 0 \\ \text{leur moment} \\ \text{étant nulles} \end{matrix}\right) - m.g.h + F.L.\frac{h}{r} \qquad - 9{,}8.10^2 + 9{,}8.10^2$$

$$\Sigma W = 0$$

3. $E_c = \frac{1}{2} . J_\Delta . \omega^2$ (masse de la manivelle négligeable devant la masse du cylindre du treuil)

$$J_\Delta = \frac{1}{2} . M.r^2$$

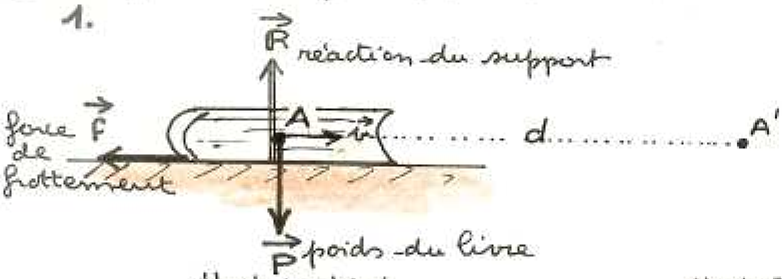
$$\boxed{E_c = \frac{1}{4} . M.r^2.\omega^2} \simeq 7{,}9\,J \quad \text{avec } \omega = \frac{120 \times 2\pi}{60}$$ (tours.min^{-1})

ω reste constante au cours de la montée du sceau
l'énergie cinétique du sceau reste constante au cours du déplacement (M = constante, r = constante, ω = constante)

$$\boxed{\Delta E_c = 0 \qquad \begin{matrix} \Sigma W = W^{\vec{P}} + W^{\vec{R}} + W^{\vec{T'}} + W^{\vec{F}} = 0 \\ \Sigma \mathcal{M} = \mathcal{M}_{\vec{P}/\Delta} + \mathcal{M}_{\vec{R}/\Delta} + \mathcal{M}_{\vec{T'}/\Delta} + \mathcal{M}_{\vec{F}/\Delta} = 0 \end{matrix}}$$

(17) supposons que nous sommes dans un référentiel terrestre supposé galiléen.

1.



état initial

$Ec_i = \frac{1}{2}.m.v^2$

état final

$Ec_f = \frac{1}{2}.m.v_f^2 = 0$ ($v_f = 0$)

$\Delta E_c = Ec_f - Ec_i$

$\Delta E_c = -\frac{1}{2}.m.v^2$

travail des forces

$W\vec{F}_{A \to A'} = \vec{F}.\vec{AA'}$

$W\vec{R}_{A \to A'} = 0$

$W\vec{P}_{A \to A'} = 0$

l'énergie cinétique diminue ... car s'exerce sur le livre une force de travail non nul

$\Delta E_c = W\vec{F}_{A \to A'} + W\vec{R}_{A \to A'} + W\vec{P}_{A \to A'}$
$\quad\quad ? \quad\quad + \quad 0 \quad + 0$

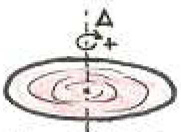
$W\vec{F}_{A \to A'} = -\frac{1}{2}.m.v^2$

$\vec{F}.\vec{AA'} = -\frac{1}{2}.m.v^2$

$-F.d = -\frac{1}{2}.m.v^2$

$\boxed{F = \frac{1}{2}\frac{m.v^2}{d}} = 1{,}8\,N$

2.



$J_\Delta = 11.10^{-3}\ kg.m^2$

état initial ...après 10 tours... **état final**

$\omega_i = 33{,}3\ tours.min^{-1}$

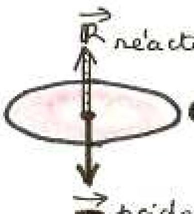
$\omega_f = 0$ (immobilité)

$Ec_i = \frac{1}{2}.J.\omega_i^2$

$Ec_f = 0$

$\Delta E_c = Ec_f - Ec_i$

$\Delta E_c = -\frac{1}{2}.J.\omega_i^2$



C couple de frottement ... il caractérise l'effet des frottements sur la rotation de la platine

moments des forces et couple

$\mathcal{M}\vec{P}/\Delta = 0$

$\mathcal{M}\vec{R}/\Delta = 0$

(ces forces n'ont aucun effet sur la rotation de la platine)

$\mathcal{M}^c$?

travaux des forces et couple

$W\vec{P} = 0$

$W\vec{R} = 0$

$W^c = \mathcal{M}^c.\alpha$

$(\alpha = 2\pi.n)$

théorème de l'énergie cinétique

$\Delta E_c = Ec_f - Ec_i = 0 - \frac{1}{2}.J.\omega_i^2$

$\Delta E_c = \Sigma W = \mathcal{M}^c.\alpha$

$\mathcal{M}^c.\alpha = -\frac{1}{2}.J.\omega_i^2$

$\boxed{\mathcal{M}^c = -\frac{1}{4}.J.\frac{\omega_i^2}{\pi.n} \simeq -1{,}1\,mN.m}$

(18)

énergie potentielle ... de pesanteur

$$E_{pz} = m.g.(z - z_r)$$

→ état de référence au niveau de la mer $z_r = 0$.

z(m)

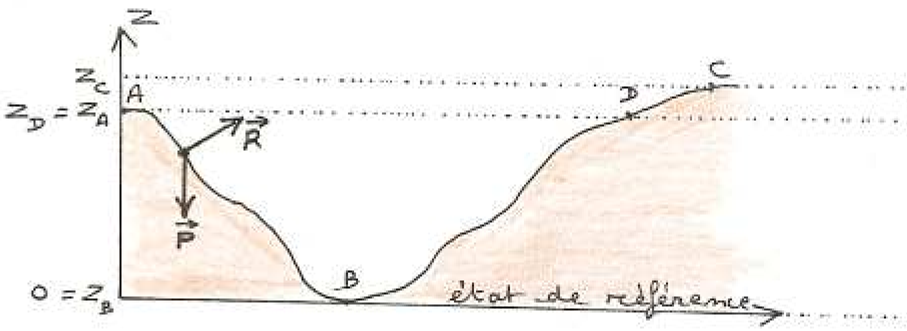
(3) 326 état de référence

... m (2) 26 état de référence

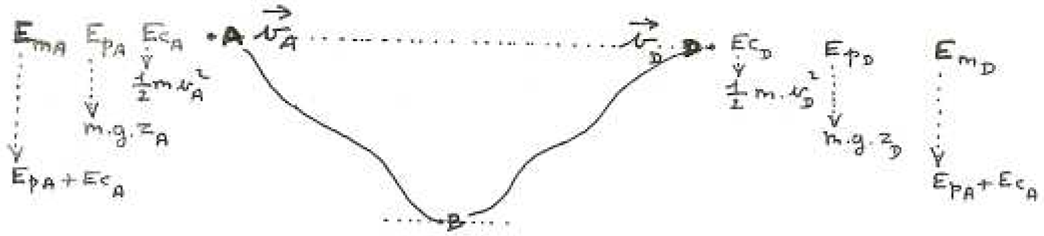
(1) 0 état de référence

$E_{pz} = m.g.(26-0) = 6,4.10^2$ J ... $= m.g(26-26) = 0$ J ... $= m.g(26-326) = -7,4$ kJ

(19) on est encore dans un référentiel terrestre galiléen (le skieur est dans le champ de pesanteur)



1.

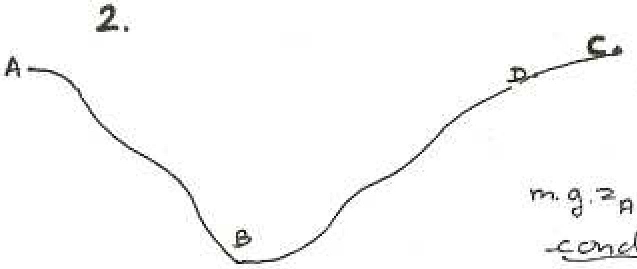


- $W_{\vec{R}} = 0$ ($\vec{R}$ est orthogonale à la piste)
  $W_{\vec{P}}$, travail moteur
- l'énergie mécanique se conserve → $\boxed{Em_A = Em_D}$
  ($\vec{P}$ est une force conservative)

$$\cancel{m.g.}z_A + \frac{1}{2} m v_A^2 = \cancel{m.g.}z_D + \frac{1}{2} m.v_D^2$$

$$8\ m.s^{-1} = \boxed{v_A = v_D}$$

2.



le skieur atteint C ... si sa vitesse ne s'annule pas avant C.

Em se conserve

$$Em_A = Em_C$$

$$m.g.z_A + \frac{1}{2}.m.v_A^2 = \cancel{\frac{1}{2}.m.v_C^2} + m.g.z_C$$

condition : $m.g.z_C \leq m.g.z_A + \frac{1}{2} m.v_A^2$

si $z_A = 10$ m
$z_C = 13,3$ m

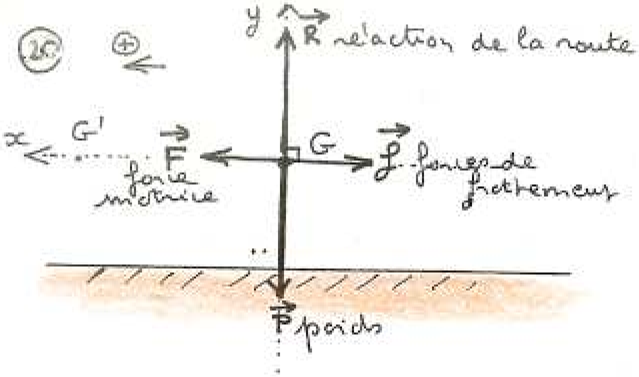
$$\boxed{z_C \leq z_A + \frac{v_A^2}{2.g}}$$

le skieur peut atteindre C.

$$\frac{1}{2}.m.v_C^2 + m.g.z_C = \frac{1}{2}.m.v_A^2 + m.g.z_A$$

$$\boxed{v_C = \sqrt{v_A^2 + 2g(z_A - z_C)}} \simeq 5\ m.s^{-1}$$

(20)



1. le cycliste effectue une force $\vec F$

$W_{\vec F} = \vec F \cdot \vec{GG'} = F \cdot GG'$ (1 km)

$W_{\vec F} = 15$ kJ

$F = f = 15$ N car on a un mouvement rectiligne uniforme

$\Sigma \vec F = \vec 0$

$\vec P + \vec R + \vec F + \vec f = 0$

(projection sur Gx) $0 + 0 + F - f = 0$

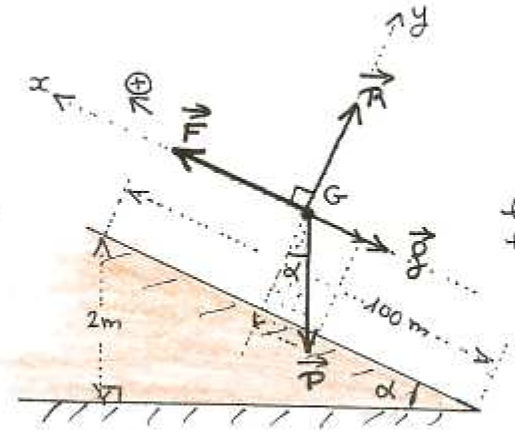
2. cette force $\vec F$ a une <u>puissance moyenne</u>

$P = \dfrac{W_{\vec F}}{t}$ (temps mis pour parcourir GG')

$P = \dfrac{F.GG'}{t} = F.\dfrac{GG'}{t} = \boxed{F.v = P} = 100$ W

c'est aussi la puissance instantanée ($P = \vec F.\vec v$)

3.



la vitesse ne change pas, le mouvement est toujours rectiligne uniforme

$\Sigma \vec F = \vec 0$

$\vec P + \vec R + \vec F + \vec f = \vec 0$

(projection sur Gx)

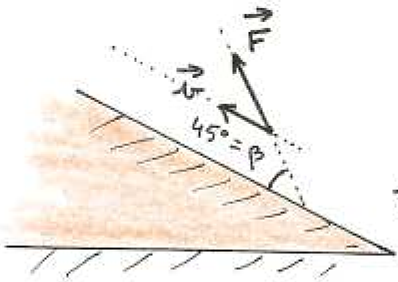
$-P.\sin\alpha + 0 + F - f = 0$

$F = f + P.\sin\alpha$

$F = 15 + 900.\dfrac{2}{100} = 33$ N

$P = F.v = 220$ W

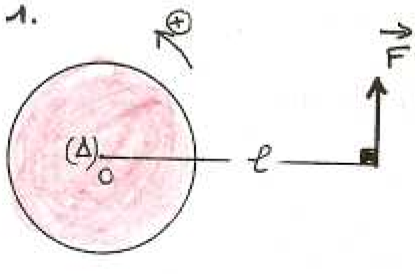
(21)



<u>puissance instantanée</u>

$\boxed{P = \vec F.\vec v = F.v.\cos\beta} \simeq 17,7$ W

(22) 1.



2. $\mathcal{M}_{\vec F/\Delta} = F.\ell = 800$ N.m

3. $W_{\vec F} = \mathcal{M}.\alpha$

$\alpha = 2\pi.n$

$W_{\vec F} = \mathcal{M}.2\pi.n \simeq 50,265$ kJ

P (moyenne) $= \dfrac{W_{\vec F}}{t} \simeq 167,55$ W

$= \dfrac{\mathcal{M}.\alpha}{t} = \boxed{\mathcal{M}.\omega = P}$

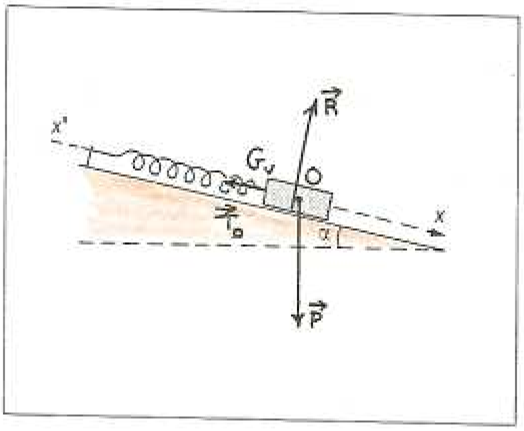
c'est aussi la puissance instantanée

(23) $P = \mathcal{M}.\omega$

$\omega = \dfrac{2\pi.n}{60}$

$P = \mathcal{M}.\dfrac{\pi.n}{30} \simeq 26,18$ kW

(24) 1. OSCILLATEUR HARMONIQUE



<u>A l'équilibre</u> dans le repère terrestre

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T}_o = \vec{0}$$

$$\vec{T}_o = -k.\overrightarrow{G_vO}$$

G_v centre d'inertie du solide à vide.

O centre d'inertie du solide à l'équilibre

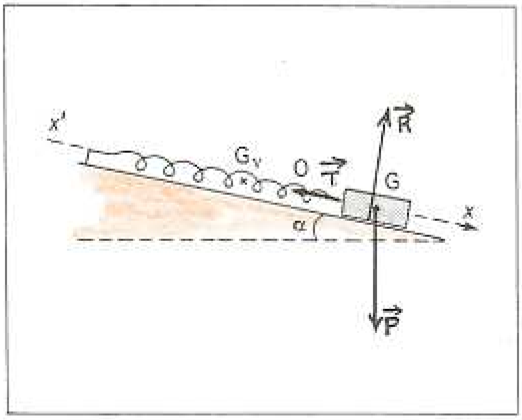
$G_vO = 8$ cm

$$\vec{P} + \vec{R} - k.\overrightarrow{G_vO} = 0$$

$P.\sin\alpha + 0 - k.G_vO = 0$ (projection sur x'x)

$$\boxed{k = \frac{m.g.\sin\alpha}{G_v.O}} \simeq 2{,}13\ N.m^{-1}$$

2.



x : élongation de G à partir de O position d'équilibre
(x = OG)

$\vec{a}$ est colinéaire à x'x.

$a_x = \ddot{x}$ (= a)

<u>théorème du centre d'inertie</u>

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m.\vec{a}$$

$$\vec{T} = -k.\overrightarrow{G_vG} = -k.(\overrightarrow{G_vO} + \overrightarrow{OG})$$

$$\vec{P} + \vec{R} - k.\overrightarrow{G_vO} - k.\overrightarrow{OG} = m.\vec{a}$$

<u>projection sur x'x</u>

$$P.\sin\alpha + 0 - k.G_vO - k.OG = m.\ddot{x}$$

$(-P.\sin\alpha)$

$$-k.x = m.\ddot{x}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}.x = 0}$$

équation différentielle du mouvement

solution : $x = x_m \cos(\sqrt{\frac{k}{m}} - \varphi)$

le solide a un <u>mouvement</u> sinusoïdal

de pulsation $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} = 4{,}61$ rad. s^{-1}

de période $T_o = \frac{2\pi}{\omega_o}$ $\boxed{T_o = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$

$T_o \simeq 1{,}36$ s

T_o est la <u>période propre</u> de cet oscillateur harmonique

3. $x_m = 3$ cm $= 3.10^{-2}$ m (la position de départ est une position extrême)

$x = x_m.\cos(\omega_o t - \varphi)$

$t = 0$

$x = 3.10^{-2} = 3.10^{-2}.\cos(\omega_o t - \varphi)$

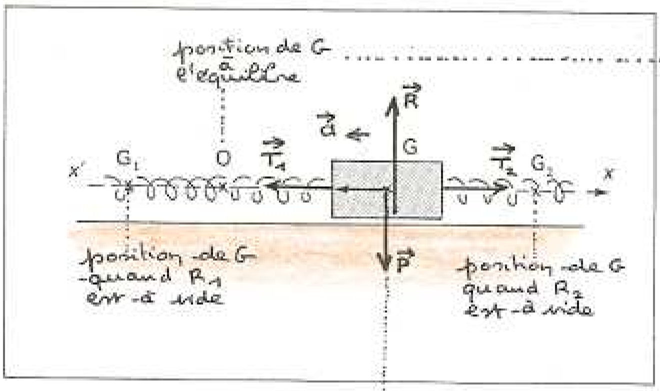
$3.10^{-2} = 3.10^{-2}.\cos(-\varphi)$

$= \cos\varphi$

$\varphi = 0$

$$\boxed{x = 3.10^{-2} . \cos 4{,}61.t}$$

25 **1.**



à l'équilibre

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = \vec{0}$$

$$\vec{T_2} = -k_2 . \vec{G_2O}$$

$$\vec{T_1} = -k_1 . \vec{G_1O}$$

$$0 + 0 - k_1 . G_1O - k_2 . G_2O = 0 \text{ (en projection)}$$

G_1O : 10 cm ; G_2O : -8 cm

$$\boxed{k_2 = -k_1 . \frac{G_1O}{G_2O}} = 50 N.m^{-1}$$

2.

$OG = x$ (valeur algébrique)

$\vec{a} \,//\, x'x$

$a_x = a = \ddot{x}$

système solide (repère terre)

<u>théorème fondamental de la dynamique</u>

$$\Sigma \vec{F} = m.\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = m.\vec{a}$$

$$\vec{T_2} = -k_2 . \vec{G_2G}$$

$$T_1 = -k_1 . \vec{G_1G}$$

$$\vec{P} + \vec{R} - k_1.(\vec{G_1O} + \vec{OG}) - k_2.(\vec{G_2O} + \vec{OG}) = m.\vec{a}$$

$$0 + 0 \underbrace{- k_1 . G_1O}_{} - k_1.OG \underbrace{- k_2 . G_2O}_{} - k_2.OG = m.a \text{ (en projection)}$$

$\underbrace{-k_1 . G_1O - k_2 . G_2O}_{0}$

$$\frac{-k_1.OG - k_2.OG}{m} = a$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k_1+k_2}{m}.x = 0}$$

équation différentielle de solution

$$x = x_m . \cos\left(\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}.t - \varphi\right)$$

à tout instant t

constantes déterminées en examinant l'état initial du mouvement.

l'oscillateur est donc ... harmonique de pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}} = 15 \text{ rad.s}^{-1}$$

3. $x = x_m . \cos(\omega_0 t - \varphi)$

$v = \dot{x} = -x_m.\omega_0 . \sin(\omega_0 t - \varphi)$

$t=0$ $x_0 = 0,02$ m

$v_0 = -0,1$ m.s^{-1}

$0,02 = x_m . \cos(-\varphi) = x_m . \cos\varphi$

$-0,1 = -x_m.\omega_0 \sin(-\varphi) = x_m.\omega_0 . \sin\varphi$

$$\begin{cases} 0,02 = x_m . \cos\varphi \\ -\frac{0,1}{15} = x_m . \sin\varphi \end{cases}$$

$-0,333 = \tan\varphi$

$0,02^2 = x_m^2 . \cos^2\varphi$

$\left(\frac{0,1}{15}\right)^2 = x_m^2 . \sin^2\varphi$

$0,02^2 + \left(\frac{0,1}{15}\right)^2 = x_m^2$

$\varphi = -0,322$ rad

$x_m = 0,0211$ m

$$\boxed{x = 0,0211 . \cos(15t + 0,322)}$$

loi horaire du mouvement

4. E_p : énergie potentielle des deux ressorts

- en O : $E_p = 0$, état de référence.
- quand le solide oscille

$E_m = E_p + E_c$ elle reste constante

$E_c = \frac{1}{2}.m.v_{max}^2 = \frac{1}{2}.m.(x_m.\omega)^2$

$E_m = 0,02$ J

26 deux méthodes pour traiter cette 1° question
- conservation de l'énergie
- théorème fondamentale de la dynamique de rotation

1.
α : élongation angulaire (à partir de la position d'équilibre)
$\ddot{\alpha}$: accélération

système solide (repère terrestre)

actions exercées
- poids $\vec{P}$
- tension $\vec{T}$
- couple de torsion C

$$\Sigma \mathcal{M}_{\vec{F}/\Delta} = J_\Delta \cdot \ddot{\alpha}$$

$$\mathcal{M}_{\vec{P}/\Delta} + \mathcal{M}_{\vec{T}/\Delta} + \mathcal{M}^c = J_\Delta \cdot \ddot{\alpha}$$

$$0 + 0 - C.\alpha = J_\Delta . \ddot{\alpha}$$

$$\boxed{\ddot{\alpha} + \frac{C}{J} . \alpha = 0}$$

équation différentielle du mouvement

solution

$$\alpha = \alpha_m . \cos\left(\sqrt{\frac{C}{J_\Delta}} . t - \varphi\right)$$

le système est un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$$

de période propre

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$$

$$T_0^2 = 4\pi^2 . \frac{J_\Delta}{C}$$

$$\boxed{C = 4\pi^2 \frac{J_\Delta}{T_0^2}} \simeq 3.10^{-2} \text{ N.m.rad}^{-1}$$

2. $\alpha = \alpha_m \cos(\omega_0 t - \varphi)$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}} \simeq 5,48 \text{ rad.s}^{-1}$$

- position de départ : position extrême du mouvement
position d'équilibre : position centrale

$t = 0$
$\alpha = \pi$ rad

$$\alpha_m = \frac{1}{2}tr = \pi \text{ rad}$$

$\pi = \pi \cos(-\varphi)$
$\cos(-\varphi) = 1$
$\varphi = 0$

$$\boxed{\alpha = \pi . \cos 5,48.t}$$

loi horaire du mouvement

3. $E_m = E_c + E_p$

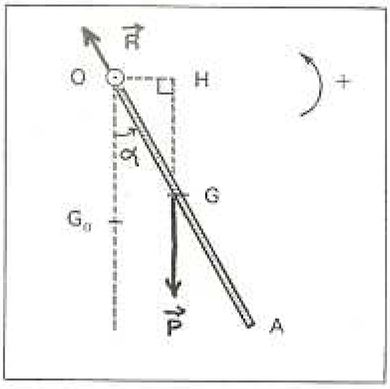
$E_c \to \frac{1}{2} . J_\Delta . \dot{\alpha}^2$; $E_p \to \frac{1}{2} C . \alpha^2$

si on néglige l'amortissement, E_m = constante
juste après le lâcher : $E_m = E_p = \frac{1}{2} . C . \alpha_m^2 = \frac{1}{2} . 3.10^{-2} . \pi^2$

$E_m = 0,148$ J

à l'état de référence l'oscillateur est à l'équilibre

27 1.



1° méthode théorème fondamentale de la dynamique

α : élongation angulaire de la tige à partir de sa position d'équilibre

$\ddot{\alpha}$: accélération angulaire.

système tige (repère terrestre)

$$\sum \mathcal{M}\vec{F}/\Delta = J_\Delta \cdot \ddot{\alpha}$$

actions extérieures: poids $\vec{P}$, réaction $\vec{R}$

$$\mathcal{M}\vec{P}/\Delta + \mathcal{M}\vec{R}/\Delta = J_\Delta \cdot \ddot{\alpha}$$

$$-P \cdot OH + 0 = J_\Delta \cdot \ddot{\alpha}$$

$$OH = OG \cdot \sin\alpha = \frac{\ell}{2} \cdot \sin\alpha$$

$$-m \cdot g \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sin\alpha = J_\Delta \cdot \ddot{\alpha}$$

$\sin\alpha \simeq \alpha$ rad pour $\alpha \leq 1$ rad (faibles amplitudes)

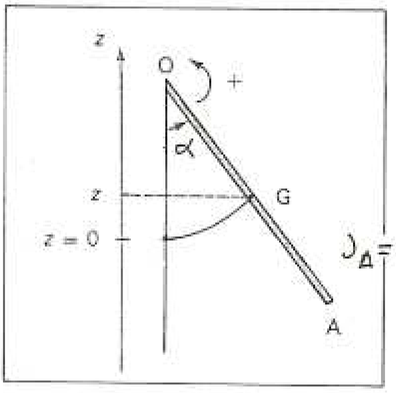
$$\boxed{\ddot{\alpha} + \frac{3g}{2\ell} \cdot \alpha = 0}$$

équation différentielle du mouvement

solution

$$\alpha = \alpha_m \cos\left(\sqrt{\frac{3g}{2\ell}}\, t - \varphi\right)$$

les oscillations sont harmoniques de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}} \simeq 3{,}83 \text{ rad s}^{-1}$



2° méthode conservation de l'énergie

$$E_m = E_c + E_p$$

$E_c = \frac{1}{2} \cdot J_\Delta \cdot \dot{\alpha}^2$; $E_p = m \cdot g \cdot z = m \cdot g \cdot \frac{\ell}{2}(1 - \cos\alpha)$

$J_\Delta = \frac{1}{3} \cdot m \cdot \ell^2$

si on néglige l'amortissement E_m se conserve

$$\frac{1}{2} \cdot J_\Delta \cdot \dot{\alpha}^2 + m \cdot g \cdot \frac{\ell}{2} \cdot (1 - \cos\alpha) = \text{constante}$$

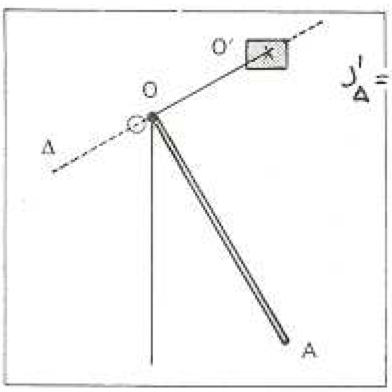
dérivons par rapport au temps

$$J_\Delta \cancel{\dot{\alpha}} \cdot \ddot{\alpha} + m \cdot g \cdot \frac{\ell}{2} \sin\alpha\, \cancel{\dot{\alpha}} = 0$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{m \cdot g \cdot \ell}{2 \cdot J_\Delta} \cdot \alpha = 0$$

2.

c'est encore un pendule pesant (masse = m + m')



$J'_\Delta = \frac{1}{3} m\ell^2 + m'\ell^2$

on choisit l'une ou l'autre méthode

... on trouvera $\omega'_0 = \sqrt{\dfrac{\frac{m}{2} + m'}{\frac{m}{3} + m'} \cdot \dfrac{g}{\ell}}$

soit $m' \simeq 48{,}8$ g

3. α : élongation angulaire

système tige (repère terrestre)

$\Sigma \mathcal{M}_{\vec{F}} = J_\Delta \cdot \ddot{\alpha}$

actions
- $\vec{P}$
- $\vec{R}$ réaction couplexe
- C couple de torsion

$\mathcal{M}_{\vec{P}/\Delta} + \mathcal{M}_{\vec{R}/\Delta} + \mathcal{M}_C = J_\Delta \cdot \ddot{\alpha}$

$-mg\frac{\ell}{2}\sin\alpha + 0 - C\cdot\alpha = J_\Delta \cdot \ddot{\alpha}$

$$-m \cdot g \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sin\alpha - C\cdot\alpha = J_\Delta \cdot \ddot{\alpha} \qquad \left(J_\Delta = \frac{1}{3} m \cdot \ell^2\right)$$

équation différentielle non linéaire

l'oscillateur n'est pas harmonique

α faible : $\sin\alpha \simeq \alpha$ rad

l'équation s'écrit finalement

$$\ddot{\alpha} + \frac{m \cdot g \cdot \frac{\ell}{2} + C}{J_\Delta} \cdot \alpha = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg\frac{\ell}{2} + C}{\frac{1}{3} m \ell^2}} \simeq 4{,}55 \text{ rad} \cdot s^{-1}$$

①

1)

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 v_2'$$
$$m_1 \cdot v_1^2 + m_2 \cdot v_2^2 = m_1 \cdot v_1'^2 + m_2 v_2'^2$$

2 équations
2 inconnues

$$m_1 \cdot (v_1 - v_1') = m_2 \cdot (v_2' - v_2)$$
$$m_1 \cdot (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 \cdot (v_2'^2 - v_2^2)$$

(v_1, v_1', v_2, v_2' valeurs algébriques)

$$m_1 \cdot (v_1 - v_1') \cdot (v_1 + v_1') = m_2 \cdot (v_2 - v_2') \cdot (v_2 + v_2')$$
$$m_1 \cdot (v_1 - v_1') = m_2 \cdot (v_2' - v_2)$$
$$(v_1 + v_1') = (v_2 + v_2')$$
$$v_1 + v_1' - v_2 = v_2'$$

$$m_1 \cdot (v_1 - v_1') = m_2 \cdot (v_1 + v_1' - v_2 - v_2)$$
$$m_1 \cdot v_1 - m_1 \cdot v_1' = m_2 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_1' - 2\, m_2 \cdot v_2$$
$$m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_1 + 2 m_2 \cdot v_2 = m_2 \cdot v_1' + m_1 \cdot v_1'$$

$$\boxed{\frac{(m_1 - m_2) \cdot v_1 + 2 m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} = v_1' \qquad \frac{(m_2 - m_1)\, v_2 + 2 m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2} = v_2'}$$

relations algébriques

$$v_1' = v_2 + v_2' - v_1$$
$$m_1 \cdot (v_1 - v_2 - v_2' + v_1) = m_2 \cdot (v_2' - v_2)$$
$$m_1 \cdot v_1 - m_1 v_2 - m_1 \cdot v_2' + m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2' - m_2 \cdot v_2$$
$$m_1 v_1 - m_1 v_2 + m_2 \cdot v_2 + m_1 v_1 = m_2 \cdot v_2' + m_1 \cdot v_2'$$

2) $v_1' - v_2' = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_1 + 2 m_2 v_2 - m_2 v_2 + m_1 v_2 - 2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}$

$v_1' - v_2' = \frac{-m_1 v_1 - m_2 v_1 + m_2 v_2 + m_1 v_2}{m_1 + m_2}$

$v_1' - v_2' = \frac{(m_1 + m_2)(-v_1) + (m_1 + m_2) \cdot v_2}{m_1 + m_2}$

$\boxed{v_1' - v_2' = -(v_1 - v_2)}$

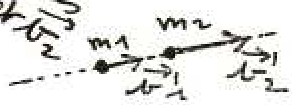
② cas particulier:

1) (2) immobile avant le choc. $\boxed{v_2 = 0}$

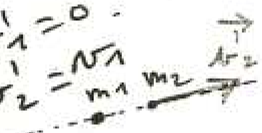
a- $\boxed{v_1' = \frac{(m_1 - m_2)\, v_1}{m_1 + m_2} \qquad v_2' = \frac{2 m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2}}$

2)

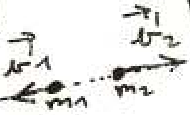
a- si $m_1 > m_2$: $\vec{v_1'}$ et $\vec{v_2'}$ même sens que $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$



b- si $m_1 = m_2$: $v_1' = 0$, $v_2' = v_1$



b- si $m_1 < m_2$: $\vec{v_1'}$ et $\vec{v_1}$ sens contraire



3)

coefficient de transfert d'énergie cinétique

$$\eta = \frac{E'c_2}{Ec_1} = \frac{1/2\, m_2 . v_2'^2}{1/2\, m_1 . v_1^2} = \frac{m_2 . v_2'^2}{m_1 . v_1^2} = \frac{m_2}{m_1} . \frac{4 m_1^2}{(m_1+m_2)^2}$$

$$\eta = \frac{4 . m_1 . m_2}{(m_1+m_2)^2}$$

$Ec_1 = E'c_1 + E'c_2$

conservation

si $m_1 = m_2$ $\eta = 1$

③ 1) $\boxed{m_1 >\!\!>\!\!> m_2}$

$$\boxed{\begin{aligned} v_1' &\simeq \frac{2 m_2 v_2}{m_1} + v_1 \simeq v_1 \\ v_2' &\simeq -v_2 + 2 v_1 \end{aligned}}$$

• si $\boxed{v_2 = 0}$ particule très légère au repos

$v_1' \simeq v_1$

$v_2' \simeq 2 v_1$ et $\eta \simeq 4 \frac{m_2}{m_1} << 1$

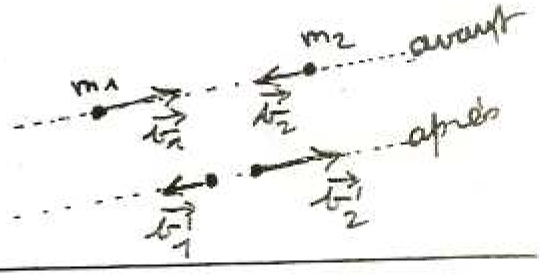
• si $\boxed{v_1 = 0}$ particule lourde au repos

$v_1' \simeq 0$

$v_2' \simeq -v_2$ rebondissement

2) $\boxed{m_1 = m_2}$

$$\boxed{\begin{aligned} v_1' &= v_2 \\ v_2' &= v_1 \end{aligned}}$$



4

1) variation d'énergie cinétique $\Delta E_c = E'_c - E_c$

avant E_c — après E'_c — au cours du choc les vitesses sont colinéaires

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\cdot v'^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

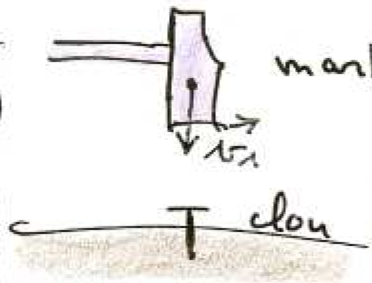
$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{(m_1+m_2)^2} - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2 m_1 m_2 v_1 v_2 - m_1^2 v_1^2 - m_1 m_2 v_1^2 - m_1 m_2 v_2^2 - m_2^2 v_2^2}{m_1+m_2}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left[v_1^2 + v_2^2 - 2 v_1 v_2\right]$$

$$\boxed{\Delta E_c = \frac{1}{2}\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{(m_1+m_2)}\cdot(v_1 - v_2)^2} < 0$$

2)



marteau m_1 v_1

clou m_2 $v_2 = 0$

au cours du choc E_c diminue et c'est cette énergie résiduelle qui permet d'enfoncer le clou.

« il faut choisir un marteau lourd »

$$\boxed{v' = \frac{m_1 \cdot v_1}{m_1+m_2} \qquad \Delta E_c = -\frac{m_1\cdot m_2}{2(m_1+m_2)}\cdot v_1^2}$$

5

1) $v'_1 - v'_2 = -e(v_1 - v_2)$

($\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ colinéaires)

$v'_2 = v'_1 - e \cdot (v_1 - v_2)$

$m_1 . v_1 + m_2 . v_2 = m_1 . v'_1 + m_2 . v'_1 - m_2 e v_1 + m_2 e v_2$

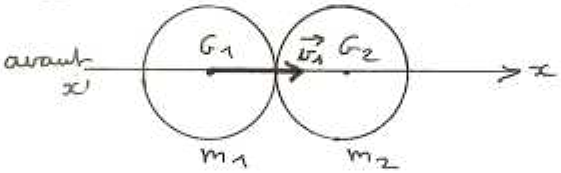
$$\boxed{\begin{aligned} \ldots\; v'_1 &= \frac{m_2 v_2 (1-e) + v_1 (m_1 + e m_2)}{m_1 + m_2} \\ \ldots\; v'_2 &= \frac{m_1 v_1 (1+e) + v_2 (m_2 - e m_1)}{m_1 + m_2} \end{aligned}}$$

2) <u>variation d'énergie cinétique</u>

$\Delta E_c = E'_c - E_c = \frac{1}{2} m_1 . v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 . v'^2_2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2$

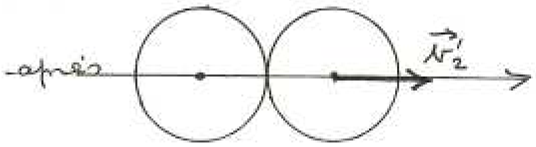
$$\boxed{\Delta E_c = -\frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 . m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^3 (1 - e^2)} < 0$$

(5) **1.** $m_1 = m_2 = 50\,g$ $\quad v_1 = 2\ m.s^{-1}\ ;\ v_2 = 0$

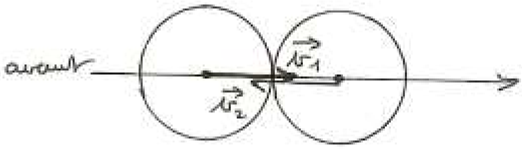


$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)\,v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 0$$

$$v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)\,v_2 + 2\,m_1 v_1}{m_1 + m_2} = v_1 = 2\ m.s^{-1}$$

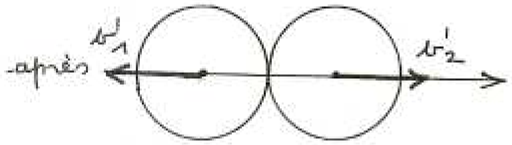


2. $m_1 = m_2 = 50\,g$ $\quad v_1 = 2\ m.s^{-1}\ ;\ v_2 = -2\ m.s^{-1}$

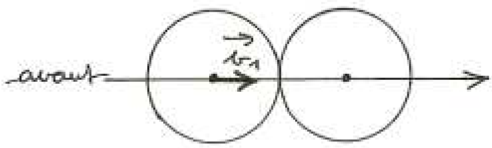


$v'_1 = -2\ m.s^{-1}$

$v'_2 = 2\ m.s^{-1}$

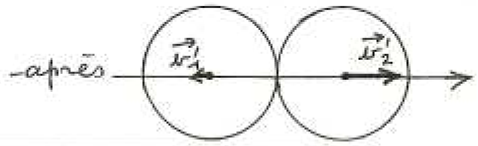


3. $m_1 = 40g$ et $m_2 = 60g\ ;\ v_1 = 1\ m.s^{-1}$ et $v_2 = 0$



$v'_1 = -0{,}2\ m.s^{-1}$

$v'_2 = 0{,}8\ m.s^{-1}$



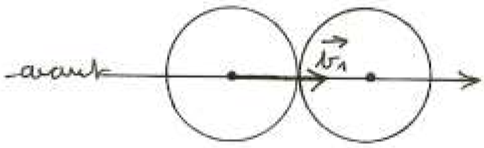
chocs élastiques

---

chocs inélastique

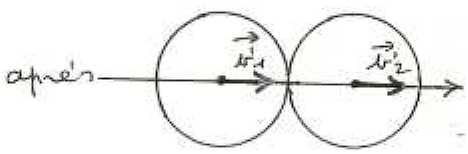
4. $m_1 = m_2 = 50\,g$ $\quad v_1 = 2\ m.s^{-1}\ ;\ v_2 = 0$

a) « mou »



$v'\begin{cases} v'_1 = 1\ m.s^{-1} \\ v'_2 = 1\ m.s^{-1} \end{cases}$

$\Delta E_c = -0{,}05\ J$



les boules restent liées.

b)

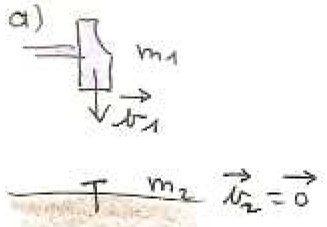
$v'_1 = \quad m.s^{-1}$

$v'_2 = \quad m.s^{-1}$

$\Delta E_c = -0{,}0255\ J$

7) 1. choc mou du marteau sur le clou

a)



$$v' = \frac{m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2} = 0{,}398 \text{ m.s}^{-1}$$

$(\simeq 0{,}4 \text{ m.s}^{-1})$

après le choc ... mou, la vitesse (v') est la même pour le marteau et le clou.

$$\Delta E_c = -\frac{1}{2} \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot (v_1 - v_2)^2 = -4 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

b) $v' \simeq 0{,}370 \text{ m.s}^{-1}$

$\Delta E_c \simeq -14{,}8 \cdot 10^{-4}$ J $\leftarrow$ ... $\Delta E_c \nearrow$ à cause des masses qui ont beaucoup varié.

8)

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}'$$

$m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2 \cdot \sin 30 = (m_1 + m_2) \cdot v'_x$ (projection sur Ox)

$0 + m_2 \cdot v_2 \cdot \cos 30° = (m_1 + m_2) \cdot v'_y$ (projection sur Oy)

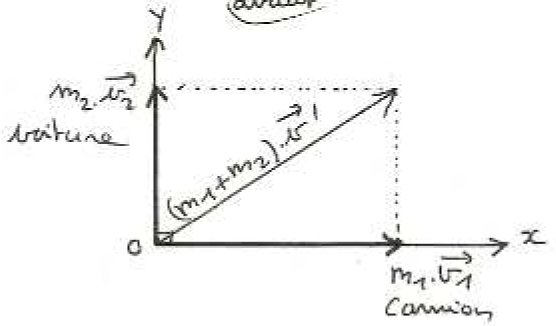
$v'_x = 0{,}133 \text{ m.s}^{-1}$

$v'_y = 0{,}577 \text{ m.s}^{-1}$

$$v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y} \simeq 0{,}592 \text{ m.s}^{-1}$$

9) choc mou entre camion et voiture

$$\underbrace{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}_{\text{avant}} = \underbrace{(m_1 + m_2) \cdot \vec{v}'}_{\text{après}}$$



$$(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2 = [(m_1 + m_2) \cdot v']^2$$

$$\sqrt{(m_1 \cdot v_1)^2 + (m_2 v_2)^2} = (m_1 + m_2) \cdot v'$$

$$v' = \frac{\sqrt{(m_1 \cdot v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}}{m_1 + m_2} \simeq 5{,}3 \text{ m.s}^{-1}$$