

EQUATION aux DIMENSIONS

1- Principe

- Les grandeurs physiques ou chimiques sont remplacées par leurs dimensions écrites entre crochet :

- masse m devient $[M]$
- distance ℓ , L , h , r , d , e ... devient $[L]$
- temps t devient $[T]$
- intensité du courant I devient $[A]$
- température θ ou T devient $[K]$
- intensité lumineuse I devient $[I]$
- quantité de matière devient $[mol]$

- Pour écrire une équation aux dimensions :

- on remplace chaque terme de l'équation par sa dimension exprimée en termes :

$$[M^\alpha \cdot L^\beta \cdot T^\delta \cdot A^\gamma \cdot K^\chi \cdot I^\epsilon \cdot mol^\eta]$$

- α , β , δ , γ , χ , ϵ , et η étant des exposants > 0 , < 0 ou $= 0$ si un(ou plusieurs) facteur(s) est sans dimension

- on réduit les expressions avec les règles mathématiques habituelles sur les puissances

2- Exercices

1. Exprimer les dimensions et les unités du système international (SI)...

a)...d'une surface S, d'un volume V, d'une masse volumique ρ .

b)...d'une vitesse v, d'une accélération a.

(variation de la vitesse avec le temps... accélération de la pesanteur $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$)

c)...d'une force F

Relation fondamentale de la dynamique : la somme des forces extérieures appliquées à un solide est égale au produit de la masse du solide par l'accélération de son centre de gravité.

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

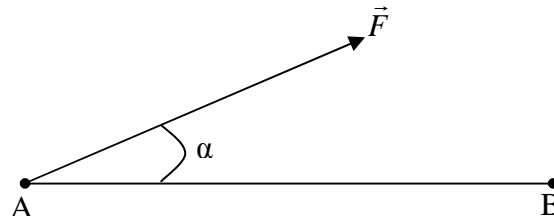
exemple : $P = m \cdot g$

d)...d'une énergie E

exemple : énergie cinétique $E_c = 1/2 \cdot m \cdot v^2$ ou énergie potentielle de pesanteur $E_p = m \cdot g \cdot h$
(h : hauteur d'élévation du corps)

...d'un travail W...d'une force constante \vec{F} dont le point d'application se déplace de A vers B :

$$W = \vec{F} \cdot \vec{AB} = F \cdot AB \cdot \cos \alpha$$



e)...d'une puissance \mathcal{P}

f)...d'une pression p

g)...d'une quantité d'électricité q, d'une tension U

•2. Exprimer les dimensions et les unités du système international (SI)...

a)...de la constante de gravitation K dans la loi de Newton

$$F = K \cdot \frac{M \cdot m}{d^2}$$

b)...de la permittivité diélectrique du vide ϵ_0 dans la loi de Coulomb

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q \cdot q'|}{d^2} \text{ ou } q \text{ et } q' \text{ sont des charges électriques, et } d \text{ la distance qui les sépare.}$$

c)...de la perméabilité magnétique du vide μ_0 dans la loi de Laplace

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I^2 \ell}{d} \text{ ou } I \text{ est l'intensité du courant électrique traversant les 2 conducteurs}$$

rectilignes, parallèles verticaux, mobiles, de longueur ℓ et séparés par une distance d .

d)...de c , dans la loi de Maxwell $\epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot c^2 = 1$

Calculer c .

$$\epsilon_0 = 8,842 \cdot 10^{-12}(\text{SI}) \text{ et } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}(\text{SI})$$

Que représente c ?

•3. Homogénéité d'une formule :

Vérifier la formule donnant la période T d'un pendule de longueur ℓ et de masse m .

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

•4. Analyse dimensionnelle :

« Comment trouver une formule »

a) Trouver la formule donnant la poussée d'Archimède F sachant que cette force est une fonction monôme du volume du corps immergé V , de la masse volumique ρ du fluide et de l'accélération de la pesanteur.

b) Trouver la formule donnant la résistance de l'air R sachant que c 'est une fonction monôme de la masse volumique de l'air ρ , de la vitesse dans l'air v et de la forme du corps par l'intermédiaire de sa section S .

• La somme et la différence de plusieurs termes de même dimension donne un seul terme de même dimension que les autres.

• On ne peut additionner ou soustraire que des quantités de même dimension.

« *on ne pas additionner des fraises et des cerises* »

• De part et d'autre d'une égalité, les deux quantités doivent avoir la même dimension

3- Sujets BTS...extraits

5. Pour les 2 extraits suivants, (B 1999 et TP 1998), les symboles des grandeurs fondamentales sont :

L pour longueur

M pour la masse

T pour le temps

Exprimer les dimensions :

- d'une masse volumique : ρ

- d'une vitesse : v

- d'une force : F

- d'une pression : p

- d'une énergie : E

B 1999...

L'intensité acoustique en un point situé près d'une source sonore peut être calculée à partir de deux relations différentes :

$$\bullet I = \frac{p^2}{\rho \cdot v}$$

p : pression acoustique

ρ : masse volumique du milieu où se trouve le point considéré

v : vitesse de propagation du son dans le milieu où se trouve le point considéré

$$\bullet I = \frac{P}{S}$$

P : puissance sonore de la source

S : surface de l'onde sonore

Montrer que la dimension de I est la même dans chacune des deux relations.

TP 1998...

Vérifier que chacun des quatre membres de l'expression de Bernoulli ont même dimension.

$$\frac{1}{2} m (v_1^2 - v_2^2) + \frac{m}{\rho} (p_1 - p_2) + m \cdot g (z_1 - z_2) = E_{21}$$

(z est une altitude, m une masse, v une vitesse et E une énergie)

6.B 2002...

A partir de la formule définissant l'énergie cinétique, $E_c = \frac{1}{2} MV^2$, exprimer la dimension d'une énergie en fonction des grandeurs fondamentales : longueur L, masse M et temps T.

Quelles sont les dimensions d'une puissance thermique et d'un débit volumique (*volume de fluide écoulé par unité de temps*) ?

SCBH 2003...

En acoustique, il existe une fréquence appelée fréquence critique f_c , pour laquelle le son est beaucoup mieux transmis par le vitrage...c'est un « trou » dans l'isolation phonique.

$$f_c = \frac{v^2}{2\pi} \sqrt{\frac{m_s}{B}} \quad \text{dans cette formule :}$$

- v = 340 m.s⁻¹, est la célérité du son dans l'air à température ambiante.

- m_s est la masse surfacique du vitrage.

- B est un coefficient qui dépend de l'épaisseur e du vitrage.

Il est proportionnel au cube de l'épaisseur du matériau : $B = k \cdot e^3$ avec $k = 5,28 \cdot 10^9$ S.I pour le verre, e étant l'épaisseur de la paroi.

Si dans cette formule, les différentes grandeurs sont exprimées selon les unités S.I, quelle sera l'unité du coefficient k ?

TP 2005...

La loi des gaz parfaits étant $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$ pour n moles de gaz dans les conditions de pression, température et volume décrites par P, V et T.

a) Préciser les unités de ces grandeurs.

b) Ecrire l'équation aux dimensions relative à la loi des gaz parfaits, puis en déduire la dimension de la constante des gaz parfaits notée R.

En déduire une unité possible pour R.