LOGHARITHMES DECIMAUX

1. Puissance de dix

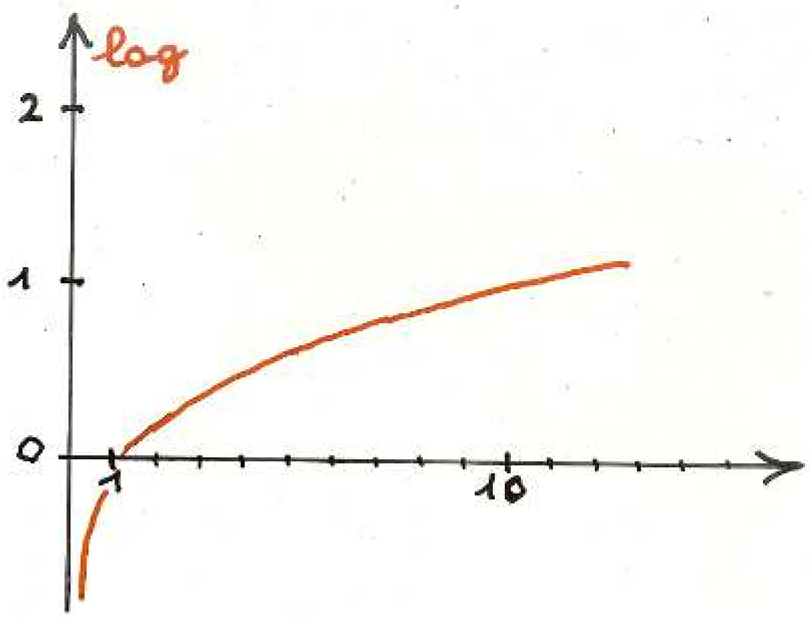
$$10^x.10^y = 10^{(x+y)}$$
$$(10^x)^y = 10^{xy}$$
$$\frac{1}{10^y} = 10^{-y}\text{, l'inverse de } 10^y$$
$$\frac{10^x}{10^y} = 10^x.\frac{1}{10^y} = 10^x.10^{-y} = 10^{x-y}$$, « *diviser c'est multiplier par l'inverse* »

2. Fonction logarithme décimal

2A puissance de dix et log…

nombre	$10^0=1$	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5
log	0	1	2	3	4	5

2B graphe



2C formules

$$\log A^x = x.\log A$$

$\log (a.x) = \log x + \log a$ $\qquad \log \frac{A}{B} = \log (A.\frac{1}{B}) = \log (A.B^{-1}) = \log A - \log B$

$$\log \frac{A}{C.D} = \log (\frac{A}{C}.\frac{1}{D}) = \log \frac{A}{C} + \log \frac{1}{D}$$

2D fonction réciproque

$\log X = Y$
$X = 10^Y$

3. pH et logarithme décimal

Application : cologarithme de la concentration des ions oxonium (*ou* hydronium)

($pH = -\log C$) $\boxed{pH = -\log\left[H_3O^+\right]}$

$\left[H_3O^+\right]$ en $mol.L^{-1}$	10^{0}	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}	10^{-13}	10^{-14}
pH	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Echelle de pH

Exercices 1 :

a) La concentration molaire des ions oxonium présents dans une solution est $\left[H_3O^+\right] = 10^{-3}$ $mol.L^{-1}$.

Calculer le pH de cette solution.

b) Le pH d'une solution est pH = 9, calculer la concentration molaire des ions oxoniums présents dans cette solution.

Même question pour une solution de pH = 1,3.

(remarque : $-1,3 = -2 + 0,7$ $\quad 10^{-1,3} = 10^{(-2+0,7)} = 10^{-2}.10^{+0,7} \approx 10^{-2}.5 \approx 5.10^{-2} \approx 0,05$)

c) Que fait le pH d'une solution, quand la concentration des ions oxonium C…

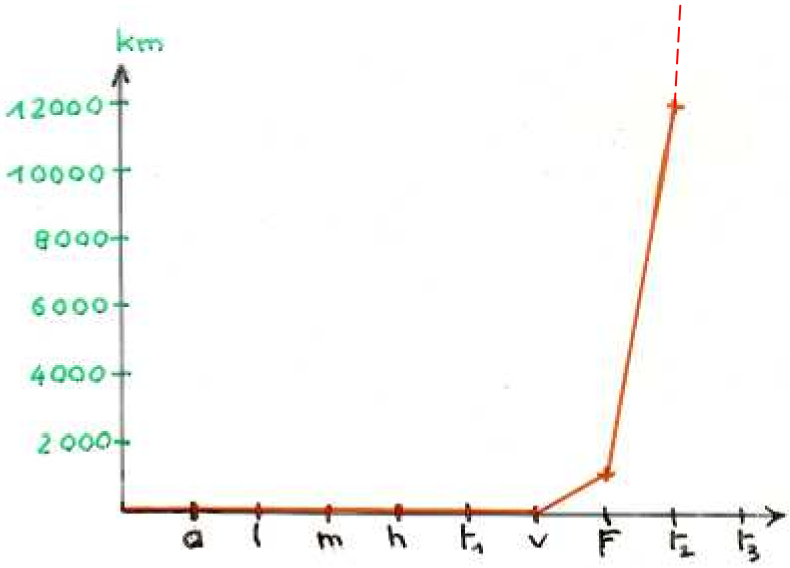
- est multipliée par 2 ?
- est multipliée par 1000 ?
- est divisée par 5 ?

4. Echelles

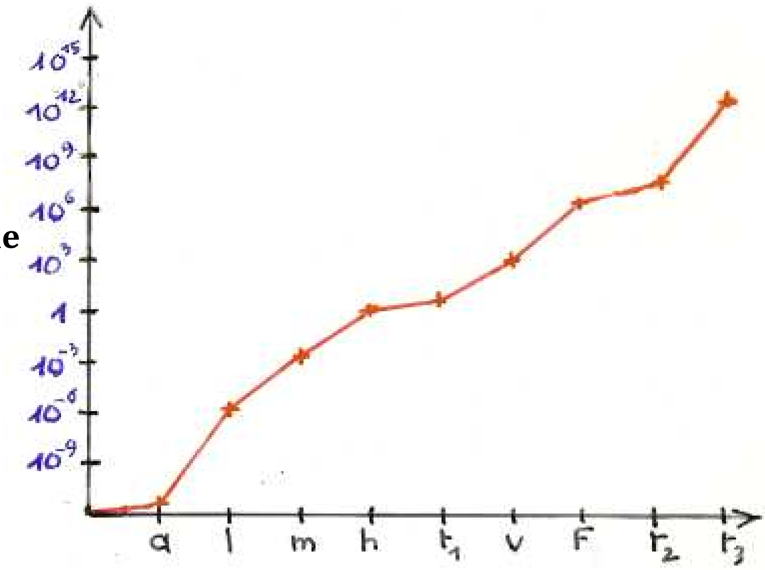
4_A dimensions et **distances** : de l'infiniment petit à l'infiniment grand

atome d'hydrogène a : 0,1 nm
longueur d'onde IR l : 3 µm
mouche m : 5 mm
homme h : 2 m
terrain t_1 : 100 m
ville v : 1 km
France F : 1100 km
Terre t_2 : 12000 km
terre-soleil t_3 : 150.10^9 km

4_B échelle linéaire



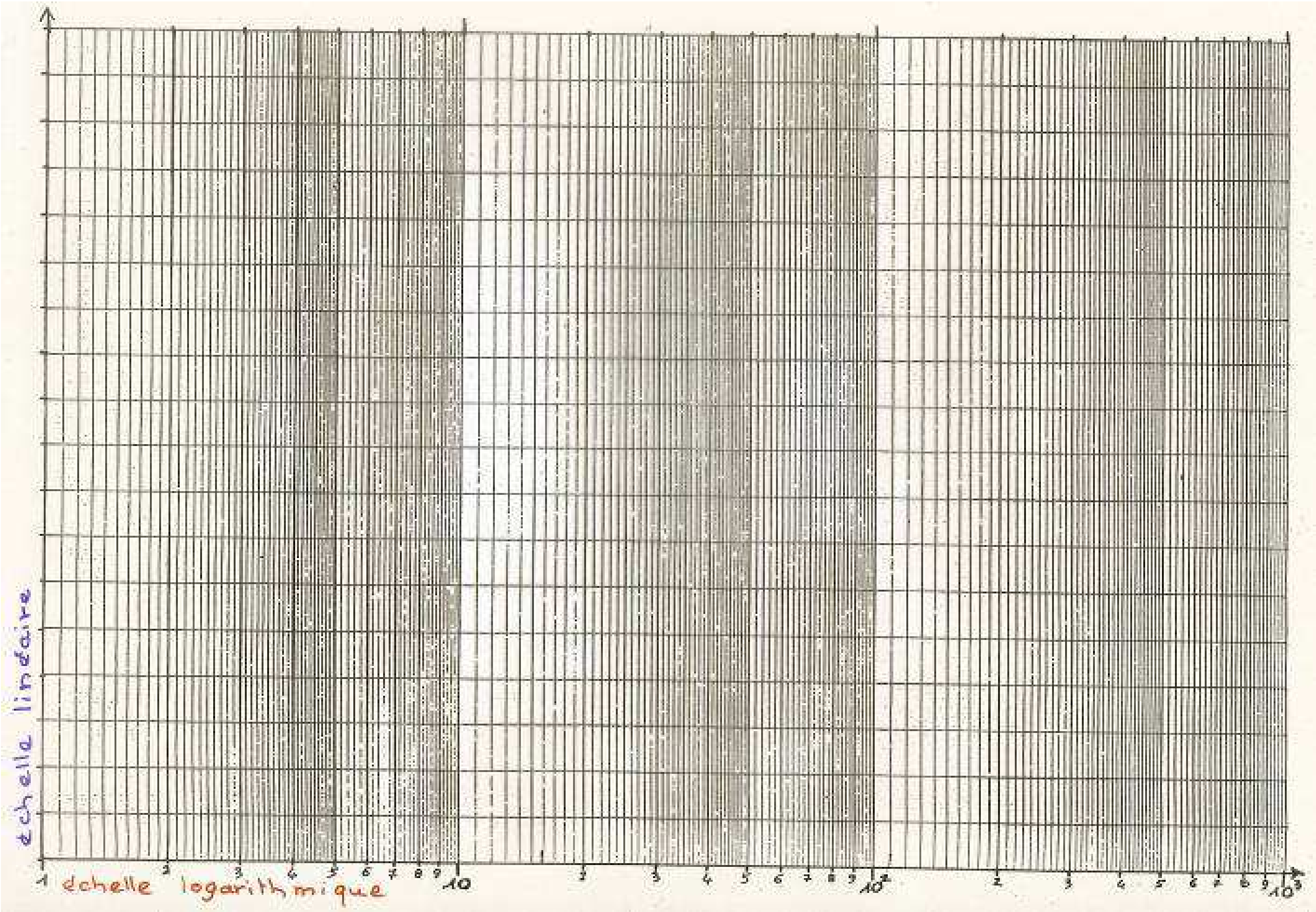
4_C échelle logarithmique



4_D laquelle utiliser ?

Lorsque la grandeur à représenter varie fortement, l'échelle linéaire n'est pas adaptée.
Avec l'**échelle logarithmique**, deux graduations dont le **rapport** vaut 10^3 sont à distance constante.
(les faibles valeurs sont espacées, les fortes valeurs sont rapprochées)
Pour construire cette échelle, on calcule log x ...et on écrit x.
(on calcule log 10^3...et on écrit 10^3)
Alors que pour l'échelle linéaire, deux graduations dont la **différence** vaut 10^3 sont à distance constante.

4E utilisation des échelles



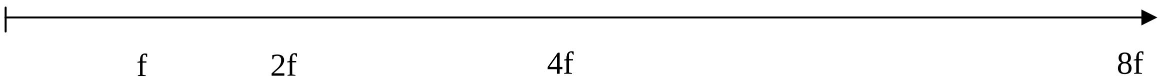
Application : fréquences du spectre sonore

Exercice 2 :

Tracé d'une échelle logarithmique :

Graduer un segment de 10cm de 1 à 10, en représentant 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10...par leur logarithme décimal (multiplié par 10).

Exercice 3 :



a) En prenant comme échelle : 2 cm pour f, tracer l'axe horizontal (***échelle linéaire***) représentant le spectre sonore (f, 2f, 4f...).

Placer aussi les autres fréquences multiples de f : 3f, 5f, 6f, 7f, 9f...

b) Représenter ce même spectre sonore en ***échelle logarithmique*** en prenant pour origine la fréquence f et 2 cm pour l'intervalle f – 2f, d'abord en plaçant les fréquences 2f, 4f, 8f, 16f..., puis en plaçant les autres fréquences : 3f, 5f, 6f, 7f...

5. Octave

5_A définition

Une octave, en acoustique, représente un ensemble de fréquences limité par : f et 2f.

exemple : octave 707 Hz – 1414 Hz

5_B centre d'une octave

*exemple : centre de l'*octave 707 Hz – 1414 Hz

5_{B1} où ?

• La fréquence centrale n'est pas 1060,5Hz (soit $707 + \frac{1414 - 707}{2}$)

• La **fréquence centrale f_0** est représentée par le « **logarithme décimal au centre de l'intervalle** »

log 707 — log 1414

$$\text{soit } \log 707 + \frac{\log 1414 - \log 707}{2}$$

$$(\log 1414 = \log 707 + \log 2)$$

$$\text{soit } \log 707 + \frac{\log 2}{2} = 3$$

$$\log 707 + 1/2 \log 2$$

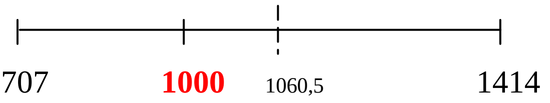
$$\log 707 + \log 2^{0,5}$$

$$\log 707 + \log \sqrt{2}$$

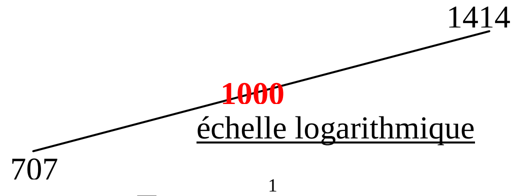
$$\log (707.\sqrt{2})$$

ce qui correspond à **f_0 = 1000Hz, fréquence centrale**

5_{B2} centre d'une octave et échelle linéaire



5_{B3} centre d'une octave et échelle logarithmique



$$707.\sqrt{2} = 707.2^{\frac{1}{2}} = \mathbf{1000}$$

$$\mathbf{1000}.\sqrt{2} = \mathbf{1000}.2^{\frac{1}{2}} = 1414$$

5_C demi-octave

L'octave 707 Hz – 1414 Hz est ainsi partagée en deux demi-octaves : 707 – **1000** et **1000** – 1414

5_D tiers d'octaves

Exercice 4 :

Découper l'octave précédente en tiers d'octaves en recherchant les fréquences f_1 et f_2 limitant ces tiers.

6. Niveau d'une grandeur G

6A définition

$$\mathbf{N} = \log \frac{G}{G_0} \quad \text{ou} \quad \mathbf{N} = 10 \log \frac{G}{G_0}$$

N (en bels, ou décibels), en utilisant une grandeur de référence G_0)

(Alexander Bell, 1847 – 1922, inventeur et physicien américain d'origine anglaise)

- *doué pour la musique*
- *s'intéresse à la phonétique*
- *enseigne aux sourds le langage par signes*
- *construit une oreille artificielle qui enregistre les sons sur une plaque de verre*
- *utilise la cire pour les disques de phonographe*
- ***invente le téléphone***

6B exemple

G représente la longueur ℓ

$\ell_0 = 10^{-12}$m (longueur de référence)

G	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^{0}	10^{3}	10^{6}	10^{9}	10^{12}	10^{15}
$\frac{G}{G_0}$	10^{0}	10^{3}	10^{6}	10^{9}	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}	10^{27}
$\log \frac{G}{G_0}$ (B)	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
$10 \log \frac{G}{G_0}$ (dB)	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270

6C application…en acoustique

niveau de puissance : $N_w = 10 \log \frac{P}{P_0}$

niveau d'intensité : $N_I = 10 \log \frac{I}{I_0}$

niveau de pression : $N_p = 20 \log \frac{p}{p_0}$

(*attention !* pression p *et* puissance P)

Exercices 5 :

a) En acoustique la puissance de référence est $P_0 = 10^{-12}$ W.

a_1- Calculer le niveau de puissance acoustique N_w d'une source sonore dont la puissance sonore est $P = 10^{-3}$ W.

a_2- Calculer la puissance d'une source sonore dont le niveau de puissance acoustique est $N_w = 90$ dB.

$$N_w = 10 \log \frac{P}{P_0}$$

Pour extraire l'inconnue P de cette équation, il faut franchir 3 barrières :

(1)*multiplions par l'inverse de 10 ;* $\frac{1}{10} N_w = 0{,}1\ N_w = \frac{1}{10}.10 \log \frac{P}{P_0} = \log \frac{P}{P_0}$

$0{,}1\ N_w = \log \frac{P}{P_0}$; (2)*fonction réciproque :* $\frac{P}{P_0} = 10^{0{,}1.N_w}$

(3)multiplions par P_0 :

$$\boxed{P = P_0.10^{0{,}1N_w}}$$

b) En acoustique l'intensité de référence est $I_0 = 10^{-12}$ W.m^{-2}.
Calculer le niveau d'intensité acoustique N_i pour une intensité sonore $I = 10^{-5}$ W.m^{-2}.

c) En acoustique la pression de référence est $p_0 = 2.10^{-5}$ Pa.

c_1- Calculer le niveau de pression acoustique N_p pour une pression $p = 10^{-3}$ Pa.

c_2- Calculer la pression acoustique p en un point de l'onde acoustique quand le niveau de pression acoustique est $N_p = 78{,}3$ dB.